

Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Tesis Doctoral



ONDAS VIAJERAS Y SOLUCIONES
AUTOSEMEJANTES EN ECUACIONES
PARABÓLICAS

Ariel Sánchez Valdés

Febrero 2001



Dirigida por

Prof. Arturo de Pablo Martínez

A mi hija y a mi esposa.



AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a Arturo de Pablo, por haber aceptado dirigirme en esta fase profesional tan importante para mí. Por su apoyo, su dedicación, y sobre todo, por su minuciosa revisión de este trabajo.

A mis padres, por su ayuda y sugerencias que he recibido siempre que los he necesitado.

Al Departamento en general por su apoyo en todos estos años de investigación.

Al Instituto de Cooperación Iberoamericana que me permitió emprender esta actividad investigadora en la Universidad Carlos III de Madrid.

A todos aquellos que han contribuido a la culminación de este trabajo.

Índice General

Introducción	3
1 Una ecuación de Fisher no lineal	9
1.1 Introducción	9
1.2 Unicidad	11
1.3 La interfase	15
1.4 Ondas Viajeras	20
1.5 La curva $c = c_*(\sigma)$	24
1.6 Comportamiento asintótico	30
2 Ondas viajeras para una ecuación de reacción-difusión-convección	37
2.1 Introducción	37
2.2 Caso $k > 0, n > 1$	41
2.2.1 El caso $-1 < \sigma < 1$	43
2.2.2 Caso límite $\sigma = -1$	55
2.2.3 Caso límite $\sigma = 1$	57
2.2.4 Caso $b < 0$	58
2.2.5 La condición de acotación	58
2.3 Caso $k > 0, 0 < n < 1$	59
2.4 La función $c = c_*(\sigma, n)$	61
2.5 Caso $k < 0$	68
2.6 Ondas Viajeras Finitas	73



2.6.1	Ondas de reacción, $k > 0$	74
2.6.2	Ondas de absorción, $k < 0$	74
2.6.3	La ecuación de la interfase	76
2.6.4	Algunas soluciones explícitas	79
3	Soluciones autosemejantes para una ecuación de reacción-difusión-convección	83
3.1	Introducción	83
3.2	Descripción de los resultados	86
3.3	El espacio de fases	89
3.4	Demostración de la existencia	100
3.5	Caso $n \leq 1$	106
	Bibliografía	111

Introducción

En esta memoria nos ocuparemos del estudio de un cierto tipo de ecuaciones parabólicas no lineales, con un amplio espectro de aplicaciones que van desde la Física a la Biología. Estas ecuaciones toman la forma

$$u_t = A(u)_{xx} + B(u)_x + C(u)$$

donde A , B y C son ciertas funciones, que en los casos más representativos son potencias.

Es un hecho bien conocido para estas ecuaciones que muchas de las propiedades de sus soluciones, tales como propagación, regularidad y comportamiento asintótico, están ligadas a la existencia de soluciones especiales con cierta simetría o invariancia ante grupos de transformaciones soportados por la ecuación. Nuestro propósito es pues centrarnos en una clase concreta de ecuaciones del tipo anterior y caracterizar dos conjuntos de soluciones especiales, las **ondas viajeras** y las **soluciones autosemejantes**. Las primeras son ondas que se desplazan en el tiempo paralelamente a sí mismas a lo largo de una cierta dirección, mientras que las segundas son soluciones que permanecen invariables bajo cierto cambio de escala.

Haciendo un poco de historia, en 1937 Fisher [28] propuso una versión determinística de un modelo estocástico para la evolución de un gen favorable en una población,

$$u_t = Du_{xx} + f(u) \tag{0.1}$$

donde u es la concentración del gen, D es el coeficiente de difusión y f , que en ese trabajo se tomaba como $f(u) = u(1 - u)$, representa la reacción cinética. Esta

ecuación ha sido objeto de numerosos estudios desde entonces, resaltando entre todos ellos el trabajo elaborado por Kolmogorov **et al.** en el mismo año 1937, [51]. En ese trabajo se prueba que toda concentración inicial igual a 1 para x grande negativo e igual a 0 para x grande positivo, evoluciona hacia un frente de onda que viaja con velocidad $c_* = 2\sqrt{D}$. Diferentes concentraciones iniciales se propagan como diferentes ondas dependiendo del comportamiento para $x \rightarrow -\infty$, pero siempre con velocidades $c \geq c_*$. Otra propiedad de estas ondas es que todas ellas son positivas.

En la modelización de la evolución de ciertos insectos, se considera la ecuación (0.1), con el coeficiente de difusión D dependiendo de la concentración en cada instante de tiempo, [54]. Una extensión natural es

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u),$$

donde $D(u) = u^\gamma$, $\gamma > 0$, y f es como antes. Para esta ecuación existe también una velocidad mínima $c = c_*(\gamma) > 0$ que representa la velocidad asintótica de propagación para cualquier concentración inicial que se anule para x grande. El estudio de esta ecuación de tipo Fisher no lineal comenzó en 1975, y citamos por ejemplo los trabajos [3, 7, 8, 65]. El efecto de la difusión no lineal se refleja en la propiedad de propagación finita, que se cumple para las ondas viajeras con velocidad exactamente c_* : estas ondas se anulan para x grande, es decir aparece una interfase $x = x_0 + ct$ que separa las regiones $\{u > 0\}$ y $\{u = 0\}$. Las ondas con velocidad $c > c_*$ son positivas; no hay ondas viajeras con velocidades $0 \leq c < c_*$.

El propósito de los dos primeros capítulos de esta memoria es estudiar la existencia de ondas viajeras y sus propiedades para dos ecuaciones relacionadas con las anteriores, la ecuación de tipo Fisher no lineal

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u^p(1 - u), \quad (0.2)$$

y la ecuación de difusión con reacción y convección

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u^{n-1}u_x + ku^p. \quad (0.3)$$

Aunque consideraremos rangos de parámetros lo más generales posibles, estamos especialmente interesados en los casos de difusión lenta $m > 1$ y reacción fuerte

$k > 0$ y $p < 1$, donde la posible no unicidad de solución para el correspondiente problema de Cauchy dificulta el estudio.

Para la ecuación (0.2), en el capítulo 1 probamos que si $m + p \geq 2$, existe una velocidad mínima $c = c_*(m, p) > 0$, función analítica de los exponentes, tal que la correspondiente onda viajera es el prototipo de evolución para datos iniciales como los considerados arriba. Esta onda es finita, no así las ondas con velocidades $c > c_*$; no hay ondas viajeras si $0 \leq c < c_*$ ó $m + p < 2$. Comparación con la onda viajera de velocidad mínima permite caracterizar la propiedad de propagación finita para las soluciones minimales del problema de Cauchy asociado.

En cuanto a la ecuación (0.3), ésta aparece en innumerable modelos físicos, como describiremos en el capítulo 2. Allí probaremos la existencia también de una velocidad mínima de propagación $c = c_*(m, n, p, k) \geq 0$, en el caso de reacción $k > 0$, para ciertos rangos de parámetros. Por ejemplo, si $n \geq 1$ existen ondas viajeras sólo si $2 \leq m + p < 2n$, y sólo con velocidades $c \geq c_* > 0$, ó $m + p = 2n$, $0 < k \leq 1/(4n)$ y $c \geq c_* = 0$. Véase el enunciado preciso de estos resultados, cf. teorema 2.1.1.

Una vez establecido el cuadro de existencia de ondas viajeras, caracterizamos cuáles de ellas son finitas, dependiendo de nuevo de los parámetros. Hemos de destacar que el conocimiento de las ondas viajeras finitas permite caracterizar, como hemos mencionado antes, la propiedad de propagación finita para las soluciones minimales del problema correspondiente. A este respecto mencionamos el trabajo [35], donde se caracteriza completamente esta propiedad en términos de la existencia de ondas viajeras locales. El objetivo fundamental de este capítulo es establecer la existencia de ondas viajeras globales, definidas en toda la recta.

Completamos el estudio de este capítulo considerando la ecuación con absorción $k < 0$. El cuadro de existencia de ondas viajeras es completamente diferente y no existe velocidad mínima.

Finalmente, el capítulo 3 se dedica al estudio de soluciones autosemejantes para la ecuación con reacción y convección (0.3). Dos motivos nos llevaron a este estudio. Por un lado, entender el caso límite de existencia de ondas viajeras, $m + p = 2n$,



que es precisamente el único caso en que pueden existir soluciones autosemejantes, y por otro profundizar en lo que se llama **ecuación de la interfase**. Ésta es una relación entre la forma de la solución cerca de la interfase y la velocidad de avance de la misma.

Para la ecuación de difusión pura, la llamada Ecuación de Medios Porosos (EMP)

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x \quad (0.4)$$

con $m > 1$, se verifica, en cada punto $(s(t), t)$ de la interfase, la relación

$$s'(t) = -v_x(s(t), t), \quad v = \frac{u^{m-1}}{m-1}. \quad (0.5)$$

En el estudio de las ondas viajeras del capítulo 2, observamos que diferentes ondas verifican diferentes ecuaciones en la interfase, dependiendo del término dominante en la ecuación, la difusión, la convección o la reacción. De hecho en el caso $n > 1$, para $m + p = 2n$, $0 < k < \frac{1}{4n}$, $c > 0$, existe una única onda viajera que verifica (0.5) e infinitas que satisfacen

$$s'(t) = \frac{1}{-w_x(s(t), t)}, \quad w = \frac{u^{1-p}}{1-p}. \quad (0.6)$$

En el caso $m + p = 2$, $n = 1$ se tiene (obsérvese que $v = w$),

$$s'(t) = -v_x(s(t), t) + \frac{1}{-v_x(s(t), t)} + 1, \quad (0.7)$$

verificándose la condición

$$|v_x(s(t), t)| \geq 1, \quad (0.8)$$

sólo para las ondas con la velocidad mínima.

Así pues, nos planteamos no sólo establecer la existencia de soluciones autosemejantes para la ecuación (0.3), sino entender si existe alguna manera de caracterizar la ecuación correcta de la interfase. En particular, argumentamos que la ecuación correcta para $n > 1$ es (0.5) y no (0.6), mientras que para $n = 1$ es (0.7), siempre con la condición (0.8).

En el último capítulo probamos que existen soluciones autosemejantes verificando la ecuación correcta de la interfase si y sólo si $k > 1/(4n)$ si $n > 1$, y para todo $k > 0$ si $n = 1$, aunque $k > 1/4$ es la restricción para que éstas sean soluciones con soporte expansivo. También probamos unicidad de tal solución en el caso $n = 1$; la unicidad en el caso $n > 1$ permanece abierto.



Capítulo 1

Una ecuación de Fisher no lineal

1.1 Introducción

En este capítulo estamos interesados en el comportamiento de las soluciones, para valores grandes del tiempo, de una versión generalizada de la ecuación de Fisher,

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u^p(1 - u) \quad p < 1 < m. \quad (1.1)$$

El carácter no lipschitziano del término de reacción para $u = 0$, (que incluso es discontinuo si $p \leq 0$, en cuyo caso consideramos $u^p = 0$ si $u = 0$), hace interesante el estudio de la ecuación (0.1) en relación con la coexistencia de la propagación finita e infinita, la no unicidad y la ausencia de un principio de comparación. Un primer estudio fue realizado en [58] en conexión con la ecuación de difusión lenta y reacción fuerte

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u^p, \quad p < 1 < m. \quad (1.2)$$

La relación entre los parámetros m y p marca la diferencia entre dos tipos de comportamiento relacionados con las cuestiones arriba mencionadas: para la ecuación (1.2), si $m + p \geq 2$, la soluciones minimales tienen propagación finita, mientras que la soluciones maximales son positivas; si $m + p < 2$ hay solución única y positiva para



todo valor inicial $u(\cdot, 0) \neq 0$, [59]. Como veremos, estas propiedades son también ciertas para la ecuación (1.1).

En cuanto al comportamiento asintótico de la ecuación (1.1), un primer paso es caracterizar la existencia de ondas viajeras. Esto puede hacerse utilizando las técnicas de Engler [25] y los resultados de Atkinson et al. [3]. Un estudio más detallado puede verse en [58]. El resultado obtenido en estos artículos es la existencia de ondas viajeras para la ecuación (1.1) si y sólo si $m + p \geq 2$ y sólo para velocidades $c \geq c_*(m, p)$. En el presente capítulo damos una nueva demostración de existencia de ondas viajeras, y describimos la curva correspondiente a la velocidad mínima c_* en términos de m y p . Utilizaremos estas ondas viajeras para describir el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1.1).

Este capítulo está organizado como sigue. En la sección 2 consideramos la ecuación N -dimensional análoga a (1.1), y estudiamos la unicidad de la solución en términos del soporte inicial y del valor de los parámetros m y p . En la sección 3 realizaremos un análisis local de la interfase en el caso $m + p \geq 2$. También probaremos algunas propiedades de concavidad.

En las secciones 4 y 5 se desarrolla un estudio de las propiedades de las ondas viajeras y sus aplicaciones. En la sección 4 caracterizamos cuáles de estas ondas viajeras son soluciones minimales y también obtenemos la velocidad mínima c_* como una función analítica del parámetro $\sigma = m + p - 2$. Consideramos aquí la ecuación (1.1) para todo valor de los parámetros $m, p \in \mathbb{R}$, $m + p \geq 2$.

Finalmente, en la sección 5 estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones minimales, así como de su interfase. Observaremos la influencia del coeficiente de tipo Fisher $R(u) = (1 - u)$, que diferencia las ecuaciones (1.2) y (1.1). Para la ecuación (1.2) las interfases son asintóticamente lineales para $m + p = 2$ y superlineales en el caso $m + p \geq 2$, mientras que para (1.1) son siempre asintóticamente lineales para todo $m + p \geq 2$.

1.2 Unicidad

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p(1 - u), & (x, t) \in Q = \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.1)$$

con $p < 1 < m$, $N \geq 1$ y $0 \leq u_0 \leq 1$, y sea $\sigma = m + p - 2$.

Para la existencia de soluciones minimales y maximales de este problema, así como para las propiedades de comparación, nos referiremos a [58]. En general la propiedad de comparación no es cierta, pero sí se cumple entre soluciones minimales y maximales. El fenómeno de no unicidad queda reflejado por el siguiente ejemplo. Si el valor inicial es nulo la solución minimal es $u \equiv 0$ y la solución maximal es $\bar{u}(x, t) = \psi(t)$, donde ψ está definida por la relación

$$t_+ = \int_0^{\psi(t)} \frac{ds}{s^p(1-s)}. \quad (2.2)$$

De hecho existe un continuo de soluciones de la forma $u(x, t; \tau) = \psi(t - \tau)$, $\tau \geq 0$.

Siguiendo [59] (ver también [1]) diremos que el problema (2.1) tiene casi unicidad si el dato inicial $u_0 \equiv 0$ es el único que produce no unicidad. En nuestro caso tendremos

Teorema 1.2.1 *i) Si $\sigma < 0$ el problema (2.1) tiene casi unicidad.*

ii) Si $\sigma \geq 0$ el problema (2.1) tiene una única solución si y sólo si el soporte de u_0 es todo \mathbb{R}^N .

La demostración de la parte de la unicidad de este teorema se basa en el hecho de que las soluciones positivas son únicas. De esta forma, probaremos que si el soporte de u_0 es todo \mathbb{R}^n entonces la solución es positiva, y si $\sigma < 0$ esto es cierto con la sola suposición de que u_0 no sea idénticamente nulo. Por otro lado, si $\sigma \geq 0$ probaremos la propiedad de propagación finita para las soluciones minimales, es decir, si u_0 se anula en una bola, entonces la solución minimal sigue siendo nula durante un tiempo en alguna bola más pequeña. Esto contrasta con las soluciones maximales, que son positivas. También observamos que la unicidad es cierta para las soluciones

estrictamente positivas, es decir, soluciones que cumplen $u \geq \delta > 0$, puesto que en este caso el termino de reacción se hace regular.

Probaremos primeramente una estimación inferior, haciendo uso de las ideas desarrolladas en [59].

Lema 1.2.2 *Sea u una solución del problema (2.1) con $u_0(x_0) > 0$. Entonces existen constantes $c_1, c_2 > 0$ que dependen sólo de m, p y N tal que*

$$i) \quad u(x_0, t) \geq c_1 t^\alpha \quad \text{para } 0 < t < 1, \quad (2.3)$$

$$ii) \quad u(x, t) > 0 \quad \text{para } 0 < t < 1, \quad |x - x_0| < c_2 t^\beta, \quad (2.4)$$

donde $\alpha = \frac{1}{1-p}$, $\beta = \frac{m-p}{2(1-p)}$.

Demostración Obtendremos las estimaciones (2.3, 2.4) por medio de comparación con una subsolución de un problema regular aproximado, sustituyendo el término de reacción por

$$f_\varepsilon(s) = \min\{s^p(1-s), \varepsilon^{p-1}(1-\varepsilon)s\}. \quad (2.5)$$

Si escribimos $w(x, t) = t^\alpha \varphi(|x|t^{-\beta})$, obtenemos la subsolución particular

$$\varphi(\xi) = (A - B\xi^2)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

donde $B = (m-1)\beta/2m$ y

$$A^{\frac{p-1}{m-1}}(1 - A^{\frac{1}{m-1}}) = \alpha + \beta N, \quad 1 \geq t \geq t_\varepsilon \equiv (\alpha + \beta N) \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-\varepsilon}.$$

Por continuidad, para cualquier $\tau > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$w(x - x_0, t_\varepsilon) \leq u(x, \tau) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

que implica

$$w(x - x_0, t + t_\varepsilon) \leq u(x, t + \tau) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t + t_\varepsilon < 1.$$

Haciendo $\tau \rightarrow 0$, obtenemos la estimación requerida con $c_1 = A^{\frac{1}{m-1}}$ y $c_2 = \sqrt{A/B}$.

#

Un refinamiento de esta demostración nos permite obtener el siguiente lema

Lema 1.2.3 *Sea u una solución del problema (2.1) con $u_0(x_0) > 0$. Entonces, existe $T > 0$ tal que*

$$u(x_0, t) \geq \left(\frac{t}{t+1} \right)^\alpha \quad \text{para } t \geq T. \quad (2.6)$$

Demostración

Seleccionando $T = (1 + \beta N / \alpha)^{\alpha-1}$ y $C = (T + 1)^{-\alpha}$, obtenemos

$$u(x_0, t) \geq Ct^\alpha \quad \text{para } 0 \leq t \leq T. \quad \#$$

Obsérvese que por este método la mejor estimación del soporte que se obtiene es

$$u(x, t) > 0 \quad \text{para } |x - x_0| < D\sqrt{t}, \quad t \geq T.$$

Sin embargo esto basta para concluir,

Corolario 1.2.4 *Sea u una solución del problema (2.1) no idénticamente nula. Entonces,*

- i) *si $u \not\equiv 0$, para toda $x \in \mathbb{R}^N$ existe $T > 0$ tal que $u(x, T) > 0$,*
- ii) *si $u \not\equiv 0$, para toda $x \in \mathbb{R}^N$ se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1$.*

Si aplicamos el Lemma 2.2 a todo punto $(x_0, t_0) \in Q$ podemos obtener el orden exacto de crecimiento de las soluciones positivas.

Lema 1.2.5 *Si u es una solución del problema (2.1) que satisface $u > 0$ en Q , entonces*

$$u(x, t) \geq \psi(t) \quad \text{en } Q. \quad (2.7)$$

El último paso en la demostración de la unicidad es el siguiente

Lema 1.2.6 *Si u es una solución del problema (2.1) que satisface $u > 0$ en Q , entonces u coincide con la solución maximal de este problema.*



Demostración Sea \bar{u} la solución maximal del problema (2.1). Sea $T > 0$ fijo y pongamos $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0, T)$. Para todo $\phi \in C^\infty(Q_T)$ con soporte compacto en x y toda $0 \leq t \leq T$, después de restar las correspondientes ecuaciones para ambas soluciones en su formulación integral, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, t) \phi(x, t) \, dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \{ (\bar{u} - u) \phi_t + (\bar{u}^m - u^m) \Delta \phi + [\bar{u}^p(1 - \bar{u}) - u^p(1 - u)] \phi \}(x, s) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Ahora eligiendo una función test ϕ que cumpla la desigualdad $\phi_t + a \Delta \phi < 0$ donde

$$a = \begin{cases} \frac{\bar{u}^m - u^m}{\bar{u} - u} & \text{si } \bar{u} \neq u \\ m u^{m-1} & \text{si } \bar{u} = u \end{cases}$$

(ver [59]) obtenemos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, t) \phi(x, t) \, dx \leq \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [\bar{u}^p(1 - \bar{u}) - u^p(1 - u)] \phi(x, s) \, dx \right\} ds. \quad (2.8)$$

Si $p \leq 0$ la demostración está concluida pues el término de la derecha es negativo. Para $p > 0$, usando la estimación (2.7), se tiene

$$\bar{u}^p(1 - \bar{u}) - u^p(1 - u) \leq p(\bar{u} - u) \psi^{p-1}, \quad (2.9)$$

y la desigualdad (2.8) se transforma en

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, t) \phi(x, t) \, dx \leq p \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u) \phi(x, s) \, dx \right\} \psi^{p-1}(s) \, ds. \quad (2.10)$$

Si ponemos $h(t) = \int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u) \phi(x, s) \, dx \right\} \psi^{p-1}(s) \, ds$, obtenemos

$$\psi^{1-p} h'(s) \leq p h(s) \quad \text{para } 0 \leq s \leq T.$$

Integrando esta ecuación para $\varepsilon \leq s \leq t \leq T$, y utilizando la ecuación diferencial que satisface ϕ , tenemos que

$$h(t) \leq h(\varepsilon) \left[\frac{\psi(t)}{1 - \psi(t)} \frac{1 - \psi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \right]^p \leq c(T) f(\varepsilon) \psi^{-p}(\varepsilon), \quad (2.11)$$

para $\varepsilon \leq t \leq T$. Por otra parte, de la ecuación (2.8) y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, s) \phi(x, s) dx \leq c(T) \int_0^s \left[\int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, \tau) \phi(x, \tau) dx \right]^p d\tau, \quad (2.12)$$

para todo $0 \leq s \leq T$. Esto implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, s) \phi(x, s) dx \leq c(T) s^{\frac{1}{1-p}}. \quad (2.13)$$

Aplicando esta estimación a $h(\varepsilon)$ obtenemos

$$h(\varepsilon) \leq c(T) \int_0^\varepsilon s^{\frac{1}{1-p}-1} ds = c(T) \varepsilon^{\frac{1}{1-p}}.$$

Finalmente, de la definición de ψ , para pequeños valores de $s > 0$ tenemos $\psi(s) \geq \mu s^{\frac{1}{1-p}}$. Todas estas estimaciones transforman (2.11) en,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u} - u)(x, t) \phi(x, t) dx \leq h(t) \leq c(T) \varepsilon.$$

Por último, si hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos $u \equiv \bar{u}$ en Q . #

Demostración del teorema 1.2.1: El lema anterior implica unicidad de las soluciones positivas. Además, exactamente como en [59, Lemma 2.4] y haciendo uso de la estimación principal del lema 1.2.2, si $\sigma < 0$ y $u_0 \equiv 0$, es fácil probar que las únicas soluciones son $u(x, t; \tau) = \psi(t - \tau)$, $\tau \geq 0$.

El resultado de no unicidad para $\sigma \geq 0$ se sigue de la velocidad finita de propagación.

1.3 La interfase

En esta sección estudiaremos las propiedades de propagación del problema (2.1) en el caso de una dimensión, donde escribimos la ecuación como en (1.1) mediante un

simple cambio de escala. Estamos interesados en el fenómeno de propagación finita, que se presenta para las soluciones minimales en el caso $\sigma \geq 0$.

Asumiremos que el valor inicial u_0 es positivo para $x \in (-\infty, 0)$ y nulo en $[0, \infty)$. Entonces, para la solución minimal u del problema (1.1), aparece una interfase

$$s(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x, t) > 0\}.$$

El comportamiento de la interfase queda mejor descrito en términos de la variable **presión**, $v = u^{m-1}/(m-1)$. La ecuación que satisface v es

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 + \mu v^{\frac{\sigma}{m-1}}g(v), \quad (3.1)$$

con $\mu = (m-1)^{\sigma/(m-1)}$, $g(v) = 1 - ((m-1)v)^{1/(m-1)}$ (interpretado en el sentido obvio cuando $\sigma = 0$).

El análisis local de la interfase realizado en [58] para la ecuación (1.2) puede ser adaptado a nuestra situación con sólo pequeños cambios, obteniéndose las propiedades siguientes

Proposición 1.3.1 *i) $s(t)$ es no decreciente y Hölder continua.*

ii) La derivada por la derecha con respecto al tiempo satisface, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} D^+s(t) &\geq 2 & \text{si } \sigma &= 0 \\ D^+s(t) &> 0 & \text{si } \sigma &> 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

iii) Si $v_x(s(t), t) = \lim_{x \nearrow s(t)} v_x(x, t_0) = -z > -\infty$, entonces se verifica la siguiente ecuación de la interfase

$$\bullet \quad \sigma = 0 \Rightarrow D^+s(t_0) = \begin{cases} z + 1/z & \text{si } z \geq 1 \\ 2 & \text{si } 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\bullet \quad \sigma > 0 \Rightarrow D^+s(t_0) = z. \quad (3.4)$$

Como vemos se obtiene la misma ecuación de la interfase que para la EMP si $\sigma > 0$, es decir, el término de reacción es pequeño en la interfase. Si $\sigma = 0$ ambos

términos, la difusión y la reacción son del mismo orden, y su influencia conjunta se refleja en la ecuación (3.3).

Las demostraciones están basada en el hecho de que cerca de la interfase se tiene la desigualdad $(1 - \varepsilon) \leq g(v) \leq 1$. Además, si $\sigma = 0$ podemos dar un resultado más preciso para la ecuación de la interfase y obtener,

Teorema 1.3.2 *Si $\sigma = 0$ se cumple*

$$-v_x(s(t), t) \geq 1 \quad \text{para } t > 0. \quad (3.5)$$

Demostración: La demostración la realizamos comparando con una solución especial de la ecuación (1.2), construida en [59] y llamada Solución Minimal Absoluta.

Supongamos que para algún $t_0 > 0$ se tiene $-v_x(s(t_0), t_0) < 1$. Entonces, de la Proposición anterior, cuando $\tau > 0$ es suficientemente pequeño,

$$s(t) = s(t_0) + 2(t - t_0) \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau.$$

Por otra parte, para algún valor $y < s(t_0)$ tenemos

$$v(x, t) \leq \varepsilon \quad \text{para } x \geq y, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau.$$

De esta manera v es una supersolución de la ecuación

$$v_t = (m - 1)vv_{xx} + v_x^2 + (1 - \varepsilon)\mu v^{\frac{\sigma}{m-1}}.$$

Sea W la solución minimal absoluta para esta ecuación centrada en el punto $(s(t_0), t_0)$.

Para $t \geq t_0$ se verifica

$$\text{sup}(W(\cdot, t)) = \{ |x - s(t_0)| \leq 2\sqrt{(1 - \varepsilon)(t - t_0)} \},$$

$$-W_x(s(t_0) + 2\sqrt{(1 - \varepsilon)(t - t_0)}, t) = \sqrt{(1 - \varepsilon)},$$

así como

$$W(x, t) \leq v(x, t) \quad \text{para } x \geq y, \quad t \geq t_0.$$

Esto implica

$$-v_x(s(t_0), t_0) \geq \sqrt{(1 - \varepsilon)}, \quad \text{para } t_0 < t \leq t_0 + \tau.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos la ecuación (3.5). #

Otra característica de la solución minimal y de su correspondiente interfase es la siguiente propiedad de concavidad:

Teorema 1.3.3 *Si la presión inicial $v(x, 0)$ es cóncava en el conjunto donde es positiva, entonces lo mismo se cumple para $v(\cdot, t)$ cuando $t > 0$. En el caso crítico $\sigma = 0$ la interfase $s(t)$ es también cóncava.*

Demostración El primer paso será sustituir el problema (1.1) por un problema aproximado con reacción lipschitziana. Entonces, siguiendo el esquema utilizado en [14], donde se prueba la concavidad de las soluciones de la ecuación de los medios porosos, descompondremos el problema (1.1) en dos problemas independientes, tomando por separado los términos de difusión y de reacción.

Consideremos el problema aproximado

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + f(u) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

con $f(s) = f_\varepsilon(s) = \frac{1}{m} \min\{s^p(1 - s), \varepsilon^{p-1}(1 - \varepsilon)s\}$, y los problemas

$$(P_d) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (P_r) \quad \begin{cases} u_t = f(u) \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Sean $S_d(t)$ y $S_r(t)$ los semigrupos asociados con los problemas (P_d) y (P_r) , respectivamente, es decir para cada valor inicial u_0 , $S_d(t)$ y $S_r(t)$ producen las soluciones de estos problemas,

$$S_d(t)(u_0)(x) = u_d(x, t), \quad S_r(t)(u_0)(x) = u_r(x, t). \quad (3.7)$$

Fijamos $t > 0$ y consideramos, para cada $n, j \in \mathbb{N}$, $n \geq j$, la función

$$u_{(n,j)} = [S_d(t/n)S_r(t/n)]^j(u_0), \quad (3.8)$$

que es la fórmula de Lie-Trotter de composición de ambos semigrupos. Observemos que el operador

$$A(u) = -(u^m)_{xx} - f(u) + ku$$

es m -acretivo en $L^1(\mathbb{R})$ cuando k es mayor que la constante de Lipschitz de f [21]. Entonces el límite $\hat{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{(n,n)}$ está bien definido y produce la única solución del problema compuesto (3.6), (ver [13, teorema 1]).

Consideremos ahora la presión \hat{v} asociada a \hat{u} y definida por $v_{(n,j)} = \frac{m}{m-1} u_{(n,j)}^{m-1}$. Estudiaremos la concavidad de \hat{v} en término de la concavidad de cada una de las iteraciones $v_{(n,j)}$.

En primer lugar, tenemos que la solución de la ecuación de los medios porosos (P_d) es cóncava, [14]. Por otro lado, la presión v_r asociada al problema (P_r) está implícitamente dada para cada x en el soporte inicial $P(0)$ por

$$t_+ = \int_{v_0(x)}^{v_r(x,t)} \frac{ds}{h(s)}, \quad (3.9)$$

donde

$$h(s) = \left(\frac{m-1}{m}s\right)^{\frac{m-2}{m-1}} f\left(\frac{m-1}{m}s\right)^{\frac{1}{m-1}} = \min\{\mu v^{\frac{\sigma}{m-1}} g(v), \frac{m-1}{m} \varepsilon^{p-1} (1-\varepsilon)s\}.$$

Además, el soporte es estacionario, $P(t) \equiv P(0)$. Por consiguiente obtenemos que

$$(v_r)_{xx} = [h'(v_r) - h'(v_0)] \frac{h(v_r)(v_0')^2}{h^2(v_0)} + \frac{h(v_r)}{h(v_0)} v_0''.$$

Obsérvese que $h(s)$ es positivo y cóncavo, de donde se deduce $(v_r)_{xx} \leq 0$.

Haciendo uso de estos dos resultados de concavidad, obtenemos que $v_{(n,j)}$ es cóncava para cada $n \geq j \geq 1$. Pasando al límite $j = n \rightarrow \infty$ obtenemos \hat{v} cóncava. Finalmente, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ llegamos a que v es cóncava.

Analizaremos ahora la interfase en el caso $\sigma = 0$. Sean $t_0 > 0$ fijo, y sea $z = -v_x(s(t_0), t_0)$. Como $v_{xx} \leq 0$ cuando $z \leq 1$ tenemos que $s(t) = s(t_0) + 2(t - t_0)$ para $t \geq t_0$, y concluye la demostración. Sea ahora $z > 1$. De la Proposición 1.3.1 tenemos $s'(t_0) = c = z + 1/z$. Consideremos el frente lineal

$$w(x, t) = z[c(t - t_0) - (x - s(t_0))]_+,$$



que es una supersolución de nuestra ecuación, cuya interfase es $\eta(t) = s(t_0) + c(t - t_0)$. Como v es cóncava tenemos que $v(x, t_0) \leq w(x, t_0)$, y por comparación, también se cumple, $v(x, t) \leq w(x, t)$ para todo $t \geq t_0$. Finalizamos comparando las interfases,

$$s(t_0) = \eta(t_0), \quad s(t) \leq \eta(t), \quad s'(t_0) = \eta'(t_0), \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Esto implica $s''(t) \leq 0$.

#

1.4 Ondas Viajeras

Primeramente resumiremos el análisis hecho en el artículo [58] para la obtención de Ondas Viajeras (OV), y después pasaremos al estudio de sus propiedades.

Introduciendo $u(x, t) = \varphi(\xi)$, $\xi = x - ct$, $c > 0$ en la ecuación (1.1), y definiendo las variables

$$X(\tau) = \varphi(\xi), \quad Y(\tau) = \left(-\frac{m}{m-1}\varphi^{m-1}\right)'(\xi), \quad d\tau = \frac{1}{m}X^{1-m}d\xi, \quad (4.1)$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -XY \\ \frac{dY}{d\tau} = X^\sigma(1-X) - Y(c-Y). \end{cases} \quad (4.2)$$

Si $\sigma > 0$, entonces el sistema tiene puntos críticos en

$$(X, Y) = (0, 0), (1, 0), (0, c). \quad (4.3)$$

Estos puntos son dos sillars $(1, 0)$, $(0, c)$ y un nodo degenerado $(0, 0)$. Buscamos trayectorias admisibles, es decir, soluciones de

$$\frac{dY}{dX} = \frac{c-Y}{X} - \frac{X^{\sigma-1}(1-X)}{Y} \equiv H(X, Y, c, \sigma) \quad (4.4)$$

para $0 \leq X \leq 1$, que unan los puntos $(1, 0)$ y $(0, c)$ ó $(1, 0)$ y $(0, 0)$. Haciendo uso de (4.1), la conexión silla-silla corresponde a una OV finita, mientras que la conexión

silla-nodo corresponderá a una onda viajera finita o positiva dependiendo del valor de p .

Si $\sigma = 0$ y $c < 2$, hay un solo punto crítico, $(X, Y) = (1, 0)$, mientras que para $c \geq 2$, los puntos críticos son

$$(X, Y) = (1, 0), (0, z_1), (0, z_2), \quad (4.5)$$

donde $0 < z_1 \leq z_2$ corresponden a las raíces de la ecuación $z^2 - cz + 1 = 0$. Las OV finitas están dadas por la conexión de $(1, 0)$ a $(0, z_1)$. En [58] se prueba (ver también [8, 25]):

Teorema 1.4.1 *La ecuación (1.1) con $m > 1$ y $p \in \mathbb{R}$ admite OV si y sólo si $\sigma \geq 0$, y únicamente para velocidades $c \geq c_*(\sigma)$; las OV con $c = c_*$ son finitas, todas las demás OV son finitas si y sólo si $p < 1$.*

Notemos que el plano de fases (4.2) tiene sentido para todos los valores de $m, p \in \mathbb{R}$. Las OV que se obtienen en el caso $m \leq 1$ son positivas.

En [58] se observa que la OV con velocidad $c > c_*$ no puede ser una solución minimal, ya que que no satisface la ecuación de la interfase (3.3). Por otra parte, la presión asociada con cada OV satisface $v_{xx}(x, t) = \phi''(\xi) = -dY/d\xi$. Como es fácil de ver en (4.1), (4.2), Y es creciente en ξ cuando $c = c_*$, (esto no se cumple si $c > c_*$), lo cual implica que al igual que las soluciones minimales, v es cóncava sólo si $c = c_*$. Completaremos aquí la caracterización de las OV minimales probando que la OV con $c = c_*$ es una solución minimal.

Teorema 1.4.2 *Las OV son soluciones minimales si y sólo si $c = c_*(\sigma)$.*

Demostración: La demostración se basa en argumentos de comparación. Usaremos como subsoluciones OV locales con velocidades $0 < c < c_*(\sigma)$, $c \approx c_*(\sigma)$.

Caso $\sigma = 0$

Primeramente consideraremos la aproximación de la función de reacción (2.5), es decir,

$$f_\varepsilon(s) = \min\left\{\frac{1}{m}s^p(1-s), \frac{1}{m}\varepsilon^{p-1}(1-\varepsilon)s\right\}, \quad (4.6)$$

y la ecuación diferencial

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(c-Y)Y - mX^{m-2}f_\varepsilon(X)}{XY} \equiv H_\varepsilon(X, Y). \quad (4.7)$$

Buscaremos trayectorias que satisfagan la ecuación (4.7), que pasen por el punto $(X_0, 0)$, $0 < X_0 < 1$, y que tiendan a $\pm\infty$ cuando X tienda a 0.

Supongamos que dado $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existe una trayectoria decreciente $Y_\varepsilon(X)$, solución de (4.7) y que une los puntos $(0, c)$ y $(X_1, 0)$ para algún $0 < X_1 < \sqrt{\varepsilon}$.

Asumiendo este hecho, para cualquier $X_1 < X_0 < 1$, la trayectoria en el primer cuadrante que sale del punto $(X_0, 0)$ no puede atravesar Y_ε , y tiende a ∞ cuando X tiende a 0. La parte de la trayectoria en el cuarto cuadrante es también fácil de ver que va $-\infty$ cuando X tiende a 0. Utilizando la relación diferencial (4.1), vemos que esta trayectoria alcanza el punto del infinito en un ξ -intervalo finito. Obtenemos así que, para cada $0 < X_0 < 1$, existe $\varepsilon > 0$, y una OV local $\varphi_c(\xi)$, solución de

$$(\varphi^m)'' + c\varphi' + f_\varepsilon(\varphi) = 0, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (4.8)$$

que satisface

$$\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = 0, \quad \max_{\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2} \varphi(\xi) = X_0, \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{m}{m-1}\varphi^{m-1}\right)'(\xi_1) = -\left(\frac{m}{m-1}\varphi^{m-1}\right)'(\xi_2) = \infty.$$

Ahora demostraremos la suposición hecha. Observemos de (4.7) que $\frac{dY}{dX} = 0$ a lo largo de la gráfica

$$\begin{cases} (c-Y)Y - \varepsilon^{1-m}(1-\varepsilon)X^{m-1} = 0 & \text{si } 0 \leq X \leq \varepsilon \\ (c-Y)Y - (1-X) = 0 & \text{si } \varepsilon \leq X \leq 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Si $0 < \varepsilon < 1 - c^2/4$, esta gráfica consiste en dos curvas, una que une $(0, 0)$ con $(0, c)$ y otra que une $(1, 0)$ con $(1, c)$. Para la primera curva el punto de máximo es

$$X = \varepsilon \left(\frac{c^2}{4(1 - \varepsilon)} \right)^{1/(m-1)} < \varepsilon.$$

Para encontrar la trayectoria deseada, consideraremos la curva $Y = T(X)$ dada por

$$\frac{1}{2}T^2 + (1 - \frac{c^2}{4}) \log X + X + k = 0.$$

Esta curva satisface, para $\varepsilon \leq X \leq 1$,

$$\frac{dT}{dX} = \frac{c^2/4 - (1 - X)}{XT} \geq \frac{(c - T)T - (1 - X)}{XY} = H_\varepsilon(X, T).$$

Seleccionando $k = (c^2/4 - 1) \log \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}$, así como

$$\frac{c^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{c^2}{4}) \log \varepsilon + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon} < 0, \quad (4.11)$$

obtenemos $T(\sqrt{\varepsilon}) = 0$ y $T(\varepsilon) > c$.

Consecuentemente, las trayectorias decrecientes que salen desde el punto $(0, c)$ no pueden atravesar T , y decrecen hasta atravesar el eje X en algún punto $0 < X_1 < \sqrt{\varepsilon}$. Necesitamos seleccionar entonces $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que satisfaga la ecuación (4.11), y además $\varepsilon < 1 - c^2/4$. Con esto la suposición quedará probada.

Consideremos ahora la OV $u_*(x, t) = \varphi_*(x - c_*t)$ con velocidad $c = c_*$, la presión asociada $\phi_* = \frac{m}{m-1}\varphi_*^{m-1}$, y la correspondiente trayectoria $Y = Y_*(X)$. Queremos comparar el valor inicial $\phi_*(x)$ con la OV local $\phi_c(x) = \frac{m}{m-1}\varphi_c^{m-1}(x)$ correspondiente a una velocidad $c < c_*$ construida en (4.9). El análisis anterior del plano de fases implica que para un punto cualquiera $z < 0$ existe $\varepsilon > 0$ y una trayectoria $Y_c(X)$ que corta la trayectoria Y_* en el punto $X = \varphi(z)$. Observando que las variables en el plano de fases representan $X = \varphi$, $Y = -\phi'$, obtenemos, por traslación,

$$\varphi_c(z) = \varphi_*(z), \quad \phi_c(z) = \phi_*(z), \quad \phi'_c(z) = \phi'_*(z).$$

Además, comparando las pendientes de Y_c e Y_* obtenemos $\phi''_c(z) < \phi''_*(z)$, así como

$$\begin{aligned} \phi'_c(x) < \phi'_*(y) & \quad \text{para} \quad z < x, y < \xi_2 \quad \text{con} \quad \phi_c(x) = \phi_*(y) \\ \phi'_c(x) > \phi'_*(y) & \quad \text{para} \quad \xi_1 < x, y < z \quad \text{con} \quad \phi_c(x) = \phi_*(y). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\phi_c(x) \leq \phi_*(x) \quad \text{para } \xi_1 \leq x \leq \xi_2.$$

Ahora, aplicando [58, lema 5.3] a cualquier solución u del problema (1.1) con valor inicial φ_* , obtenemos

$$u(z + ct, t) \geq \varphi_c(z) = \varphi_*(z) = u_*(z + c_*t, t).$$

Concluimos la demostración haciendo c tender a c_* .

Caso $\sigma > 0$

En este caso no podemos construir la solución deseada disparando desde cualquier punto $(X_0, 0)$, $0 < X_0 < 1$. Por otra parte la curva con pendiente cero en la ecuación (4.7) no tiende a cero. Por lo tanto dispararemos de un punto cualquiera $(X_0, Y_*(X_0))$ en la trayectoria. Si $0 < \varepsilon < X_0$, obtenemos una trayectoria Y_c que va a ∞ cuando X tiende a 0, y decrece a hasta $Y = 0$ para algún $X_1 > X_0$. Observemos que, para el caso $\sigma = 0$, este método requeriría probar que la trayectoria Y_c no va al origen, lo cual es válido por la construcción de la trayectoria Y_ε . El punto clave es que Y_* sale de $(0, c_*)$ si $\sigma > 0$ mientras que para $\sigma = 0$ sale de $(0, c_*/2)$.

El resto de la demostración es completamente análogo al caso anterior.

1.5 La curva $c = c_*(\sigma)$

Estudiamos en esta sección la función c_* que da la velocidad mínima en términos del parámetro σ .

Seguiremos aquí el método desarrollado en [6], que consiste en la aplicación del teorema de la Función Implícita (TFI) a cierta función que relaciona la velocidad c_* con el parámetro σ . El punto de partida será la solución explícita, para $\sigma = 1$,

$$\frac{1}{m\sqrt{2}}(-\xi)_+ = \int_0^{\varphi(\xi)} \frac{s^{m-2}}{1-s} ds, \quad (5.1)$$

que se obtiene integrando la trayectoria explícita $Y(X) = c(1 - X)$, con $c = 1/\sqrt{2}$ en la ecuación (4.4). Para $m = 2$ y $p = 1$ esta OV fue obtenida en [3]. Observemos también que por este método obtenemos una nueva prueba de la existencia de las OV.

Teorema 1.5.1 *La velocidad mínima c_* es una función analítica decreciente de la variable σ en $[0, \infty)$ con imagen $(0, 2]$.*

La curva $c = c_*(\sigma)$, obtenida numéricamente, se muestra en la figura 5.1.

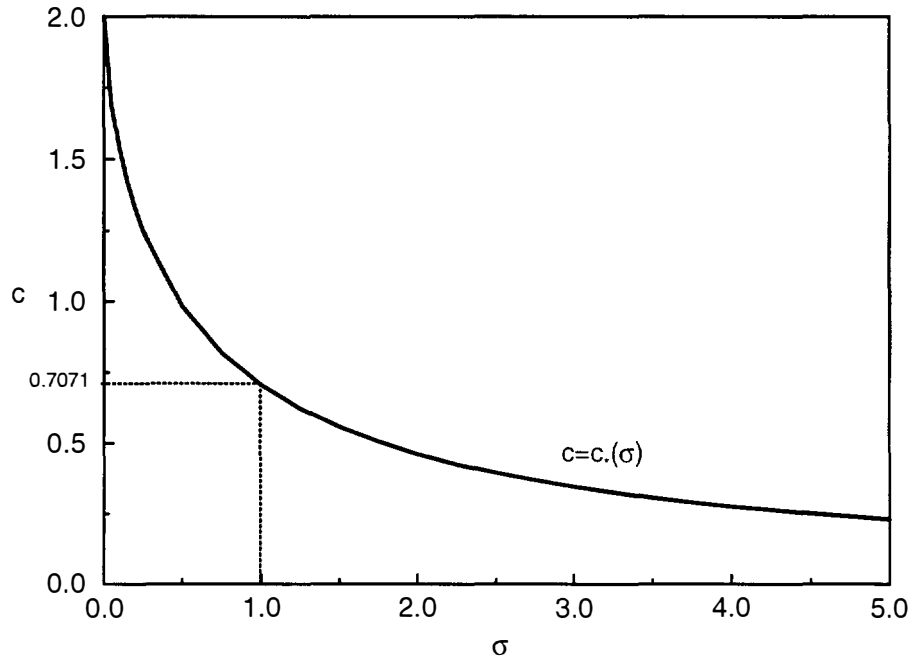


Figura 5.1: La curva $c = c_*(\sigma)$.

Demostración: Disparemos de los puntos de silla del plano de fases para obtener una conexión para $\sigma \neq 1$. Como $\partial H/\partial c > 0$, es obvio que, si tal conexión existe para

$c = c_*$, las trayectorias que parten de $(1, 0)$ y entran en la región $D = (0, 1) \times (0, \infty)$, se irán a infinito cuando X tiende a 0, si $c > c_*$, y a 0 si $0 < c < c_*$. Por otra parte, las trayectorias que entran en $(0, c)$ desde D atraviesan la línea $X = 1$ en $Y > 0$, si $c > c_*$, y el eje $Y = 0$ en $0 < X < 1$, si $0 < c < c_*$.

Consideremos entonces, para $c > 0$ y $\sigma \geq 0$, la trayectoria Y_1 que entra en $(0, c)$ y la trayectoria Y_2 que sale de $(1, 0)$. Es decir, para algún $0 < X_* < 1$ sean

$$\begin{aligned} Y_1(\cdot, c, \sigma) : [0, X_*] &\rightarrow \mathbb{R}^+, & Y_1(0, c, \sigma) &= c, \\ Y_2(\cdot, c, \sigma) : [X_*, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^+, & Y_2(1, c, \sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\partial Y_i(X, c, \sigma) / \partial X = H(X, Y_i, c, \sigma).$$

Es claro que estas dos funciones son analíticas. Es fácil también ver que para cada $\sigma \geq 0$, existen c_0 y X_* tales que $Y_i > 0$ para $c \geq c_0$ (ver (5.12)), aunque no necesitaremos ninguna información sobre X_* ni sobre c_0 . Definamos ahora la función (analítica) $\ell : (0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\ell(c, \sigma) = Y_1(X_*, c, \sigma) - Y_2(X_*, c, \sigma). \quad (5.3)$$

La existencia de una conexión para algún c y σ es equivalente a la **condición de ligadura**

$$\ell(c, \sigma) = 0. \quad (5.4)$$

El TFI nos permite definir $c = c_*(\sigma)$ en una vecindad de cualquier solución (c, σ) de la ecuación (5.4) siempre que se verifique la **condición de transversalidad**

$$\frac{\partial \ell}{\partial c}(c_*(\sigma), \sigma) \neq 0. \quad (5.5)$$

Además, de la ecuación (5.4) podemos obtener la derivada

$$c'_*(\sigma) = \frac{-\partial \ell / \partial \sigma}{\partial \ell / \partial c}(c_*(\sigma), \sigma). \quad (5.6)$$

Primero probaremos la condición de transversalidad. Definamos

$$z_i(X) = \partial Y_i / \partial c(X, c, \sigma), \quad i = 1, 2, \quad (5.7)$$

y demostraremos que $z_1(X_*) - z_2(X_*) \neq 0$. Derivando la ecuación (4.4) con respecto al parámetro c obtenemos

$$\frac{dz_i}{dX} = \frac{\partial H}{\partial c} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y_i}{\partial c} = A_i z_i + B,$$

con

$$A_i(X) = \frac{-1}{X} + \frac{X^{\sigma-1}(1-X)}{Y_i^2}, \quad B(X) = \frac{1}{X}. \quad (5.8)$$

Éstas son dos ecuaciones lineales, solubles explícitamente con los valores iniciales

$$z_1(0) = 1, \quad z_2(1) = 0 \quad (5.9)$$

(ver la ecuación (4.8)). Se tiene

$$z_1(X) = G_1(X) \int_0^X \frac{B(s)}{G_1(s)} ds, \quad z_2(X) = -G_2(X) \int_X^1 \frac{B(s)}{G_2(s)} ds \quad (5.10)$$

con $G_i(X) = \exp \left[\int^X A_i(s) ds \right]$. De aquí se deduce $z_2 < 0 < z_1$, es decir,

$$\frac{\partial \ell}{\partial c}(c_*(\sigma), \sigma) = z_1(X_*) - z_2(X_*) > 0. \quad (5.11)$$

Ya que $(1/\sqrt{2}, 1)$ es una solución de (5.4), obtenemos la existencia de una función analítica $c_*(\sigma)$ definida en una vecindad de $\sigma = 1$.

Además, la condición de transversalidad es uniforme para $\sigma > 0$, así que podemos extender el rango de existencia a un intervalo abierto maximal (en $[0, \infty)$). Ahora tomemos una sucesión $\{Y_n\}$, ($n \rightarrow \infty$), de soluciones de la ecuación (4.4) con parámetros $(c_n, \sigma_n) \rightarrow (c_\infty, \sigma_\infty)$, y que satisface $Y_n(0) = c_n$, $Y_n(1) = 0$. Si probamos la estimación uniforme, $0 \leq \sigma_\infty < \infty$, $0 < c_\infty \leq 2$, entonces se deduce que existe una función $Y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ que es también solución de nuestro problema. Así pues el intervalo maximal de existencia es un cerrado de $[0, \infty)$, y de aquí que debe ser todo $[0, \infty)$. La demostración de la existencia depende de la siguiente estimación:

Lema 1.5.2 *Para $\sigma > 0$, la velocidad mínima satisface*



$$c_*^2(\sigma) < \frac{4\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}} \quad (5.12)$$

$$\frac{2}{(\sigma+1)(\sigma+2)} \leq c_*^2(\sigma) \leq \frac{2}{\sigma(\sigma+1)}. \quad (5.13)$$

Demostración: La primera estimación ha sido obtenida en [58] mediante el estudio del comportamiento del gráfico

$$(c - Y)Y = X^\sigma(1 - X)$$

donde $dY/dX = 0$. Por otra parte, de la ecuación (4.4) tenemos que

$$Y \frac{dY}{dX} \geq -X^{\sigma-1}(1 - X) \quad (5.14)$$

$$\frac{d(XY^2)}{dX} \leq c^2 - 2X^\sigma(1 - X).$$

Ahora integramos estas desigualdades a lo largo de la trayectoria $Y = Y(X)$ para $c = c_*$, desde $X = 0$, $Y = c_*$ hasta $X = 1$, $Y = 0$, y así obtenemos (5.13). #

Puede observarse que estas estimaciones implican $0 < c_*(\sigma) < 2$, para $0 < \sigma < \infty$ y además $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} c_*(\sigma) = 0$.

El hecho de que $c_*(\sigma)$ es una función decreciente se sigue ahora del estudio del signo de $\partial \ell / \partial \sigma$. De forma análoga a la ecuación (5.7) definimos $\theta_i(X) = \partial Y_i / \partial \sigma(X, c, \sigma)$, $i = 1, 2$. Entonces tenemos que

$$\frac{d\theta_i}{dX} = \alpha_i \theta_i + \beta_i,$$

con

$$\alpha_i(X) = A_i(X), \quad \beta_i(X) = \frac{-X^{\sigma-1}(1 - X) \log X}{Y_i(X)}, \quad (5.15)$$

y

$$\theta_1(0) = \theta_2(1) = 0. \quad (5.16)$$

Al igual que antes obtenemos

$$\theta_1(X) = G_1(X) \int_0^X \frac{\beta_1(s)}{G_1(s)} ds, \quad \theta_2(X) = -G_2(X) \int_X^1 \frac{\beta_2(s)}{G_2(s)} ds. \quad (5.17)$$

Una vez más observamos inmediatamente que $\theta_2 < 0 < \theta_1$, es decir,

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma}(c_*(\sigma), \sigma) = \theta_1(X_*) - \theta_2(X_*) > 0,$$

y con ello el teorema queda probado $\quad \#$

El método anterior también nos permite calcular la derivada en $\sigma = 1$.

Lema 1.5.3

$$\frac{dc_*}{d\sigma}(1) = \frac{-13\sqrt{2}}{48}. \quad (5.18)$$

Demostración:

El cálculo de la derivada (5.6) en $\sigma = 1$ se realiza mediante la sustitución de las funciones explícitas en las ecuaciones (5.10) y (5.17) dadas por la solución explícita de (5.1). Para $(c, \sigma) = (1/\sqrt{2}, 1)$ tenemos,

$$Y_i(X) = (1 - X)/\sqrt{2}, \quad A_i(X) = \frac{-1}{X} + \frac{2}{1 - X}, \quad G_i(X) = \frac{1}{X(1 - X)^2}.$$

De aquí que

$$(z_1 - z_2)(X) = \frac{1}{X(1 - X)^2} \int_0^1 (1 - s)^2 ds = \frac{1}{3X(1 - X)^2}. \quad (5.19)$$

También

$$\beta_i(X) = -\sqrt{2} \log X,$$

lo que implica

$$(\theta_1 - \theta_2)(X) = \frac{-\sqrt{2}}{X(1 - X)^2} \int_0^1 s(1 - s)^2 \log s ds = \frac{13\sqrt{2}}{144X(1 - X)^2}. \quad (5.20)$$

Como $c'_*(\sigma) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{z_1 - z_2}$ se sigue (5.18). $\quad \#$

1.6 Comportamiento asintótico

En esta sección investigaremos el comportamiento de las soluciones minimales del problema (1.1) para valores grandes del tiempo. El resultado principal es que estas soluciones se propagan con una cierta velocidad límite, precisamente la de la OV minimal. Señalemos que en el caso de una potencia pura ([58, 59]), esto ocurre sólo para el exponente crítico $\sigma = 0$, mientras que para $\sigma > 0$ la propagación es superlineal. Esto se explica por el hecho de que en la ecuación tratada en estos trabajos, existen OV sólo cuando $\sigma = 0$.

Consideremos el problema (1.1) con valores iniciales u_0 nulos para $x \geq 0$. Sea u la solución minimal de este problema y $x = s(t)$ su interfase. Una posible interfase por la izquierda se puede tratar de la misma forma.

Comencemos con el resultado más sencillo,

Teorema 1.6.1 *La interfase de la solución minimal satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{t} = c_*. \quad (6.1)$$

La figura 6.1 muestra la interfase de la solución minimal del problema (1.1) calculadas numéricamente para dato inicial una función de Heaviside y diferentes valores de σ . En la tabla 6.1 se muestra la pendiente asintótica de estas interfases.

Demostración:

Caso $\sigma = 0$.

Este caso se sigue directamente de la ecuación con reacción una potencia. Para la estimación inferior usamos (3.2). Para obtener la estimación superior, usamos un frente lineal (en presión) con velocidad 2, que es una supersolución de nuestra ecuación.

Caso $\sigma > 0$

Primeramente escribiremos el desarrollo de las OV para $\xi \rightarrow -\infty$, el cual se obtiene de la ecuación (4.1) y del comportamiento de $Y(X)$ cuando $X \rightarrow 1$:

$$\varphi_c(\xi) \approx 1 - e^{\gamma\xi} \quad \gamma - 1/\gamma = c. \quad (6.2)$$

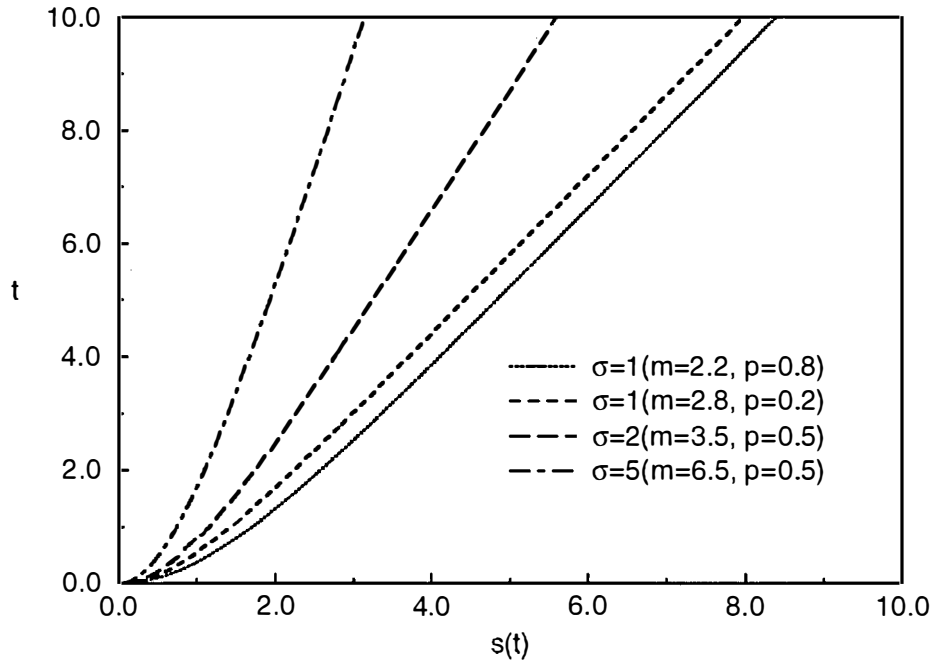


Figura 6.1: La interfase de la solución minimal $u_0(x) = 1$, si $x < 0$; $u_0(x) = 0$, si $x \geq 0$.

Si el valor inicial tiende a 1 para $x \rightarrow -\infty$ más despacio que la OV con velocidad c_* , es decir, si esta OV puede ponerse encima de u_0 , entonces una comparación directa implica que, para algún $a > 0$,

$$u(x, t) \leq \varphi_*(x - a - c_*t),$$

es decir $s(t) \leq a + c_*t$. Si este no fuera el caso, consideramos, para cada $0 < \delta < 1$, la función reescalada

$$w(x, t) = \delta^{\frac{-2}{m-p}} \varphi_*(\delta(x - a) - c_*\delta^{\frac{2(1-p)}{m-p}} t), \quad (6.3)$$

que satisface la ecuación

$$w_t = (w^m)_{xx} + w^p(1 - \delta^{\frac{2}{m-p}} w),$$

y de aquí que es una supersolución de nuestra ecuación. Consecuentemente, si seleccionamos $a > 0$ tal que $w(0, 0) \geq 1$, comparando tendremos,

$$s(t) \leq a + \delta^{\frac{-\sigma}{m-p}} c_* t,$$

y por tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{t} \leq \delta^{\frac{-\sigma}{m-p}} c_* \quad \text{para cada } \delta < 1.$$

Para obtener una estimación inferior, usamos una OV con velocidad $c < c_*$ como fue construida en la demostración del teorema 1.4.2, y realizamos una comparación local. De esta manera también podremos considerar valores iniciales con soporte compacto.

Primero notemos que en la prueba del teorema 1.4.2 construimos, para cada $c < c_*$ y $\varepsilon > 0$, una OV local $w(x, t) = \varphi_\varepsilon(x - ct)$ que es subsolución de nuestra ecuación en una región $\{\xi_1 + ct < x < \xi_2 + ct\}$, y que satisface

$$\varphi_\varepsilon(\xi) \leq X_1 \quad \text{para } \xi_1 < \xi < \xi_2.$$

Además X_1 no es pequeño cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Usando los lemas 1.2.2, 1.2.3 obtenemos que, para algún $T > 0$, la solución satisface

$$u(x, T) \geq X_1 \quad \text{para } \xi_1 < x < \xi_2.$$

Comparando se deduce

$$u(x + ct, t + T) \geq \varphi_\varepsilon(x),$$

es decir

$$s(t) \geq \xi_2 + c(t - T) \quad \text{para todo } c < c_*. \quad \#$$

En la figura 6.2 mostramos la solución minimal del problema (1.1) obtenida numéricamente, con $\sigma = 1$ y para una condición inicial dada por una función de

σ	m	Velocidad calculada	Velocidad esperada
1	2.2	0.711	0.707
1	2.8	0.708	0.707
2	3.5	0.467	0.463
5	6.5	0.236	0.232

Tabla 6.1: La velocidad asintótica para las interfases de la figura 6.1, comparada con la velocidad esperada, tal como fue calculada para la figura 5.1.

Heaviside. En el gráfico se considera intervalos de tiempo regulares y se compara la evolución de la solución con la OV explícita.

Más interesante es el siguiente resultado, en el espíritu de [7].

Teorema 1.6.2 *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x + ct, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } c > c_* \\ 1 & \text{si } c < c_*. \end{cases} \quad (6.4)$$

Demostración: El comportamiento asintótico para $c > c_*$ es simplemente una consecuencia del teorema anterior. La prueba de que la solución trasladada con una velocidad menor que la mínima es no sólo positiva, sino que en realidad tiende a uno, es sencilla si la OV minimal puede ser colocada por debajo. Suponiendo que éste es el caso. Del teorema 1.4.2 se deduce

$$u(x, t) \geq \varphi_*(x - c_*t),$$

es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x + ct, t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_*(x - (c_* - c)t) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi_*(\xi) = 1.$$

Para el caso general, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, $a > 0$ un número cualquiera y $\delta > 0$ pequeño. Sabemos que existe un instante $T > 0$ tal que

$$u(x, T) \geq 1 - \delta \quad \text{para } x_0 - a < x < x_0 + a.$$



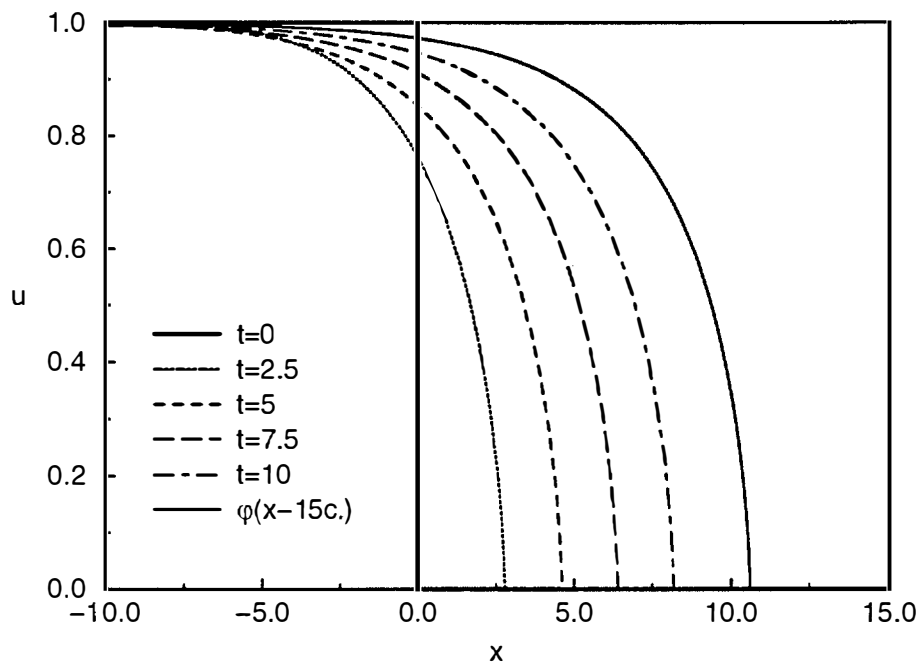


Figura 6.2: La solución minimal para $u_0(x) = 1$, si $x < 0$; $u_0(x) = 0$, si $x \geq 0$, con $\sigma = 1$ y $m = 2.5$, comparada con la OV explícita.

Consideremos entonces una OV local φ con velocidad $c < \bar{c} < c_*$ que satisface

$$0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_0) = 1 - \delta, \quad \text{para } x_0 - a < x < x_0 + a.$$

Comparando tenemos

$$u(x_0 + \bar{c}(t - T), t) \geq 1 - \delta \quad \text{para } t \geq T.$$

Finalmente tomamos $T_1 = \frac{\bar{c}}{\bar{c} - c}T$ y obtenemos

$$u(x_0 + ct, t) \geq 1 - \delta \quad \text{para } t \geq T_1.$$

Obsérvese que T depende de x_0 cuando $x_0 \notin \text{supp}(u_0)$. Por tanto, si $u_0(x) > 0$ para $x < 0$, la convergencia es uniforme en conjuntos de la forma $(-\infty, a]$. #

Capítulo 2

Ondas viajeras para una ecuación de reacción-difusión-convección

2.1 Introducción

En este capítulo estudiamos la existencia de OV para la ecuación de reacción-convección-difusión

$$u_t = a(u^{m-1}u_x)_x + bu^{n-1}u_x + ku^p \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1)$$

con $a, m, n > 0$ y $b, k, p \in \mathbb{R}$

Un estudio local de las OV en la ecuación (1.1) se puede ver en [31, 35]. Decimos que $u(x, t) = \phi(x - st)$ es una OV **local** si ϕ está definida únicamente en un intervalo de la forma $(-\infty, z_0)$ o (z_0, ∞) . Nuestro propósito es estudiar la existencia de ondas viajeras globales y caracterizar cuáles de ellas son finitas.

Así pues buscamos soluciones en forma de onda viajera $u(x, t) = \phi(x - st)$, con $s \in \mathbb{R}$, definidas para todo $z = x - st \in \mathbb{R}$. En particular consideraremos soluciones que satisfacen $\phi(z) \geq 0$ y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = 0, \quad (1.2)$$

a las que llamaremos **ondas por la derecha**. Ondas por la izquierda, es decir, ondas que se anulan en $-\infty$, se obtienen por reflexión $x \rightarrow -x$, que implica el cambio de velocidad $s \rightarrow -s$. Decimos que dos OV, ϕ_1, ϕ_2 son iguales si $\phi_1(z) = \phi_2(z - z_0)$ para algún z_0 . Los diferentes valores de los parámetros se analizan en las diferentes secciones del capítulo, donde los casos más interesantes son $b > 0, k > 0$ y $n > 1$. En particular el caso $b < 0$ se reduce por simetría a la búsqueda de la ondas por la izquierda con $b > 0$, y el caso $n < 1$ puede siempre reducirse al caso $n > 1$ mediante una transformación. Cambios más radicales ocurren entre la reacción $k > 0$ y la absorción $k < 0$. Mientras para $k < 0$ existen OV para cada velocidad $s \in \mathbb{R}$ (o solamente para $s \leq 0$), para $k > 0$ hay una velocidad mínima $s_* > 0$ que delimita la existencia de OV, tal y como ocurría en el capítulo anterior.

Definamos, para $b \neq 0$, las constantes

$$\ell = \min\{1, n\}, \quad L = \max\{1, n\}, \quad (1.3)$$

y pongamos $\ell = L = 1$ si $b = 0$. Los resultados fundamentales son los siguientes

Teorema 2.1.1 *La ecuación (1.1) con $k > 0$ y $n \neq 1$ admite soluciones en forma OV si y sólo si*

$$b \geq 0, \quad \ell \leq \frac{m+p}{2} \leq L, \quad p \leq L. \quad (1.4)$$

Además,

- i) Si $m + p = 2n$, existen OV sólo si $b \geq 2\sqrt{ank}$, y para cada velocidad $s \geq 0$.
- ii) Si $m + p \neq 2n$, existen OV sólo para velocidades $s \geq s_*(a, b, k, m, n, p) > 0$.
En particular, $s_* = 2\sqrt{ak}$ si $m + p = 2$; $s_* = \frac{ak\ell}{b}$ si $m + p = n + 1$; y
 $\lim_{m+p-2n \rightarrow 0} s_* = 0$ si $b \geq 2\sqrt{ank}$.
- iii) Todas las ondas son decrecientes en su soporte.
- iv) Si $m + p \neq 2$ y $s = s_*$ la OV es única; en cualquier otro caso y, dependiendo de los parámetros, el conjunto de las OV puede ser infinito.

Teorema 2.1.2 *La ecuación (1.1), con $k < 0$ y $n \neq 1$, puede tener soluciones de tipo OV sólo si $m + p > 0$. Más aún, existen OV si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones.*

- i) $n > 1$, $b > 0$ y $m \geq \max\{p, n\}$.
- ii) $n > 1$, $b < 0$ y $p \leq \max\{m, n\}$.
- iii) $n > 1$, $b = 0$, $s > 0$ y $m \geq \max\{p, 1\}$.
- iv) $n > 1$, $b = 0$, $s < 0$ y $p \leq \max\{m, 1\}$.
- v) $n > 1$, $b = s = 0$ y $m \geq p$.
- vi) Para $n < 1$ las condiciones son las mismas intercambiando los papeles de b y s y también de n y 1 .

Finalmente, cuando para alguna velocidad existe una OV ésta es única.

Nota 2.1.3 *El caso no convectivo, $b = 0$, está contenido en los trabajos [43, 58]. Por otra parte, para $n = 1$ la ecuación (1.1) puede reducirse a este caso por una simple traslación $x \rightarrow x - bt$. De aquí que usando los resultados de [43] para $k < 0$, obtenemos la misma conclusión, mientras que, haciendo uso de los resultados de [58], para $k > 0$ observamos que existen OV si y sólo si $m + p = 2$ y para velocidades $s \geq s_* = 2\sqrt{ak} - b$; o lo que es lo mismo, existen OV para cada velocidad $s \geq 0$ si y sólo si $b \geq 2\sqrt{ak}$.*

Por último, el caso $k = 0$ puede ser fácilmente resuelto de forma explícita: si $n > 1$ existe una única OV para cada $s \geq 0$ y $m \geq n$ ó $s > 0$ y $b < 0$; si $n < 1$ existe una única OV para cada $s > 0$, $b > 0$ y $m \geq 1$ ó $s < 0$ y $b > 0$; si $n = 1$ llegamos a la Ecuación de Medios Porosos. Ver también [23, 31, 37, 46, 47] y la última parte de este capítulo.

En lo sucesivo asumiremos siempre $b \neq 0$, $k \neq 0$ y $n \neq 1$. Realizando un simple cambio de escala podemos considerar $a = 1$ y $|b| = 1$. En efecto, consideramos

$$v(x, t) = \alpha u(\beta x, \gamma t)$$

con

$$\beta = \frac{a}{|b|} \alpha^{n-m}, \quad \gamma = \frac{a}{b^2} \alpha^{2n-m-1}. \quad (1.5)$$

Esto implica los cambios en el coeficiente de reacción

$$k \rightarrow k_0 = \frac{ak}{b^2} \alpha^{2n-m-p} \quad (1.6)$$

y en la velocidad

$$s \rightarrow c = \frac{1}{|b|n} \alpha^{n-1} s. \quad (1.7)$$

También, si $m + p \neq 2n$ podemos tomar $|k_0| = 1$, seleccionando $\alpha = \left(\frac{a|k|}{b^2}\right)^{\frac{1}{m+p-2n}}$. Por tanto la velocidad mínima s_* puede escribirse en este caso como

$$s_* = |b| \left(\frac{a|k|}{b^2} \right)^{\frac{1-n}{m+p-2n}} c_*(\sigma, n), \quad (1.8)$$

donde c_* es alguna función de $\sigma = \frac{m+p-n-1}{n-1} \in (-1, 1)$ y $n > 0$, $n \neq 1$. Aplicaremos entonces el método desarrollado en la sección 1.5 del capítulo 1 para probar que la función $c_*(\sigma, n)$ es analítica en $\sigma \in (-1, 1)$ para cada $n > 0$, $n \neq 1$.

Sustituyendo ahora $v(x, t) = \varphi(x - ct)$ en la ecuación (1.1) normalizada, obtenemos

$$-c\varphi' = (\varphi^{m-1}\varphi')' + \epsilon\varphi^{n-1}\varphi' + k_0\varphi^p, \quad (1.9)$$

con $\epsilon = \pm 1$, y también $k_0 = \pm 1$ si $m + p \neq 2n$, y donde $'$ denota diferenciación con respecto a $\xi = x - ct$. La ecuación (1.9) se interpreta en sentido débil, es decir, φ y $\varphi^{m-1}\varphi'$ son funciones continuas en \mathbb{R} y la ecuación se satisface en su versión integral estándar. Si φ se anula para $\xi \geq \xi_0$ diremos que la onda es **finita**, y por traslación podemos poner $\xi_0 = 0$. En este caso debemos tener $\varphi^{m-1}\varphi'(0) = 0$ para que φ sea solución débil de (1.9); ésta es la llamada **condición de flujo**. En contraposición, las ondas que satisfacen $\varphi > 0$ en \mathbb{R} se llaman ondas **positivas**.

Este capítulo está organizado como sigue: la ecuación (1.9) con $k > 0$ se analiza, por medio de técnicas de plano de fase, en las secciones 2.2 y 2.3, dependiendo de

que los valores de n sean mayores o menores que uno; el estudio de la función $c_*(\sigma, n)$ que da la velocidad mínima, se realiza en la sección 2.4; el caso $k < 0$ se estudia en la sección 2.5, y por último, en la sección 2.6 se caracteriza cuáles de la OV son finitas.

2.2 Caso $k > 0$, $n > 1$

Definiendo las variables

$$X = \varphi^{n-1}, \quad Y = -\varphi^{m-2}\varphi', \quad (2.1)$$

la ecuación (1.9) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\xi} = -(n-1)X^{\frac{n-m}{n-1}}Y \\ \frac{dY}{d\xi} = (Y - c - \epsilon X)X^{\frac{1-m}{n-1}}Y + k_0X^{\frac{p-1}{n-1}} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\epsilon = \pm 1$, $k_0 > 0$ y $k_0 = 1$ si $m + p \neq 2n$. Las variables satisfacen $\xi \in \mathbb{R}$, $X(\xi) \geq 0$, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} X(\xi) = 0$, y si $X(\xi) = 0$ para $\xi \geq 0$, la condición de flujo es $\lim_{\xi \rightarrow 0} X^{\frac{1}{n-1}}(\xi)Y(\xi) = 0$.

Con el objeto de eliminar la singularidad en el origen del sistema (2.2), reparametrizamos definiendo en forma implícita $d\zeta = X^{1-m}d\xi$, y así obtenemos el nuevo sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\zeta} = -(n-1)XY = F_1(X, Y) \\ \frac{dY}{d\zeta} = Y^2 - cY - \epsilon XY + k_0X^{\frac{m+p-2}{n-1}} = F_2(X, Y). \end{cases} \quad (2.3)$$

Ambos sistemas son topológicamente equivalentes en el interior del semiplano $\Pi = \{X \geq 0, Y \in \mathbb{R}\}$ y con la misma orientación ya que $\frac{d\zeta}{d\xi} > 0$.

Por tanto buscar ondas viajeras se reduce a buscar trayectorias $Y = Y(X)$ en Π soluciones de la ecuación

$$(n-1)\frac{dY}{dX} = \epsilon + \frac{c-Y}{X} - \frac{k_0X^\sigma}{Y} \equiv F(X, Y), \quad (2.4)$$

donde $\sigma = \frac{m+p-n-1}{n-1}$.

En cuanto a la condición de flujo, ésta se escribe aquí como

$$\lim_{X \rightarrow 0} X^{\frac{1}{n-1}} Y(X) = 0. \quad (2.5)$$

Las trayectorias para las cuales $\lim_{X \rightarrow 0} Y(X) = \pm\infty$ no satisfacen esta condición de flujo (2.5), ya que, como veremos, cumplen $|Y(X)| \geq \mu X^{\frac{-1}{n-1}}$ para $X \rightarrow 0$ y alcanzan $X = 0$ en un valor finito del parámetro ξ .

Por otra parte, existen también trayectorias en Π que tiende a ∞ para $X \rightarrow \infty$ en un valor finito de ξ , dependiendo del crecimiento de $Y(X)$. De esta forma obtenemos ondas definidas solamente en algún intervalo (ξ_1, ∞) , que poseen una asíntota vertical en $\xi = \xi_1$. Son OV **no acotadas**, no definidas globalmente. De (2.2) obtenemos la **condición de acotación**

$$\int^{\infty} \frac{X^{\frac{m-n}{n-1}}}{Y(X)} dX = \infty. \quad (2.6)$$

Esta condición se verifica en particular si $Y(X) \approx X^{\delta}$ con $\delta \leq \frac{m-1}{n-1}$. (Aquí y en el resto del trabajo escribiremos $f \approx g$ para significar $f = O(g)$, $f \neq o(g)$.)

Asumamos ahora $\epsilon = +1$ ($b > 0$). El caso $\epsilon = -1$ ($b < 0$) es fácilmente descartable y lo haremos de forma breve al final de la sección.

Una primera ojeada a los puntos críticos finitos situados sobre el eje Y , las soluciones de la ecuación $F_2(0, Y) = 0$, permite seleccionar fácilmente qué tipo de trayectorias en Π pueden dar OV por la derecha y son por tanto admisibles (un análisis más detallado se realizará con posterioridad). En particular tendremos una, dos o ninguna solución de esta ecuación, y los correspondientes puntos críticos tendrán siempre el mismo signo, dependiendo de c . Como el signo de Y es el opuesto del signo de la derivada de φ , las OV por la derecha deben aproximarse al eje Y desde el primer cuadrante. Por otra parte, todas las trayectorias que atraviesan el eje horizontal deben tender a ∞ cuando $\zeta \rightarrow \infty$ ó a $-\infty$, de modo que no satisfacen la condición de flujo. Concluimos que las únicas trayectorias admisibles son:

trayectorias definidas para cada $X > 0$, positivas y con límite finito cuando $X \rightarrow 0$.

Las trayectorias definidas para todo $X > 0$, negativas, que tienen límite finito cuando $X \rightarrow 0$ deben ser descartadas ya que corresponden a ondas crecientes y por tanto no satisfacen la condición (1.2). Entre las trayectorias admisibles seleccionaremos aquellas que corresponden a OV globales, es decir, que satisfacen la condición (2.6).

El resultado de no existencia es sencillo.

Lema 2.2.1 *El sistema (2.3) con $\epsilon = +1$ no posee trayectorias admisibles si $c < 0$ ó $|\sigma| > 1$.*

Demostración:

$c < 0$. Los puntos críticos sobre el eje Y satisfacen $Y \leq 0$, y de aquí que puedan existir sólo OV por la izquierda.

$\sigma < -1$. Ya que no hay puntos críticos que sean finitos en Π , todas las trayectorias en el primer cuadrante se acercan a $Y = \infty$, cuando $X \rightarrow 0$.

$\sigma > 1$. En este caso todas las trayectorias atraviesan el eje X , y por consiguiente no son admisibles. Esto se deduce observando que para cada $c \geq 0$ existe $0 < X_c < \infty$ tal que $\frac{dY}{dX} < 0$, para $X > X_c$, y la derivada $\frac{dY}{dX}$ es muy negativa para X grande, $Y > 0$.

#

Ahora caracterizaremos la existencia de OV en el rango de valores $|\sigma| \leq 1$. Omitimos en esta sección la dependencia de n al escribir c_* .

2.2.1 El caso $-1 < \sigma < 1$

Teorema 2.2.2 *Si $-1 < \sigma < 1$ existe una velocidad mínima $c_*(\sigma) > 0$ tal que las trayectorias admisibles existen solamente para $c \geq c_*(\sigma)$.*

Dividiremos la prueba en tres partes.



Los puntos críticos

En primer lugar recordemos que ponemos $k_0 = 1$ en (2.3) si $\sigma \neq 1$. Cuando $-1 < \sigma < 1$, el sistema (2.3) tiene dos puntos críticos, $O = (0, 0)$ y $P = P_c = (0, c)$, y tenemos que considerar solamente $c \geq 0$. Si $c > 0$, el punto P es un punto silla, sin embargo, si $\sigma < 0$, la matriz jacobiana es singular, y tenemos que realizar un cambio de variables antes de obtener dicha conclusión. De hecho esta matriz es, para $\sigma > 0$,

$$A(P) = \begin{pmatrix} -(n-1)c & 0 \\ -c & c \end{pmatrix},$$

para $\sigma = 0$ es

$$A(P) = \begin{pmatrix} -(n-1)c & 0 \\ 1-c & c \end{pmatrix},$$

mientras que para $\sigma < 0$, definiendo $Z = X^{\sigma+1}$, la matriz es

$$B(P) = \begin{pmatrix} -(n-1)(\sigma+1)c & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}.$$

La variedad inestable es el eje Y y la variedad estable \mathcal{W}_P^e tiene la dirección del vector $v = (1, 1/n)$, $v = (1, (c-1)/cn)$ y $v = (0, -1)$, respectivamente, según el signo de σ . Considerando ahora el punto crítico del origen O , vemos que la matriz jacobiana es, o degenerada (si $\sigma > 0$), o singular (si $\sigma < 0$). Entonces O es un punto no hiperbólico, y el sistema linealizado es inadecuado para describir la dinámica de este punto. Siguiendo [20] estudiaremos los términos de orden superior en la aproximación del lado derecho de (2.2). Si definimos $\eta = -c\zeta$, obtenemos

$$B(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

como matriz jacobiana. La ecuación $F_2(X, Y) = 0$, considerada en una vecindad del origen, implica

$$Y = \frac{1}{c}X^{\sigma+1} + o(X^{\sigma+1}).$$

Como a lo largo de esta curva se verifica

$$\frac{dX}{d\eta} = \frac{n-1}{c^2} X^{\sigma+2} + o(X^{\sigma+2}),$$

obtenemos que el origen es un nodo estable para $X > 0$, y todas las trayectorias entran en O como la potencia $Y = \frac{1}{c} X^{\sigma+1}$.

Si $\sigma < 0$, realizamos además el cambio $Z = X^{\sigma+1}$, $H = Y - \frac{1}{c} X^{\sigma+1}$, para obtener (2.7), y demostrar que a lo largo de la curva

$$H = \psi(Z) = \frac{(n-1)(\sigma+1)+1}{c^3} Z^2 + o(Z^2),$$

se tiene

$$\frac{dZ}{d\eta} = \frac{(n-1)(\sigma+1)}{c^2} Z^2 + o(Z^2).$$

De esta forma llegamos a la misma conclusión.

En el caso $c = 0$, los puntos P y O colapsan en un punto nodo-silla. Véase también la Nota 2.2.5.

Para completar la caracterización de los puntos críticos consideraremos además los puntos en el infinito. Éstos son: $S_{\pm\infty}$, correspondientes a los puntos $(0, \pm\infty)$; Q_{∞} , correspondiente al comportamiento $Y \approx X^{\sigma}$, y R_{∞} , correspondiente a $Y \approx \frac{1}{n} X$. Tenemos que R_{∞} y $S_{\pm\infty}$ son nodos y Q_{∞} es un punto de silla topológico. Para ver esto y dar una mejor descripción de la dinámica en el semiplano Π , consideramos las coordenadas homogéneas,

$$X = \frac{U}{W}, \quad Y = \frac{V}{W}, \quad U^2 + V^2 + W^2 = 1, \quad (2.8)$$

que transforman el plano XY en la **Esfera de Poincaré** (ver por ejemplo [61]). En estas coordenadas, y en forma diferencial, la ecuación (2.4) se convierte en

$$\begin{aligned} & (V^2W - cVW^2 - UVW + U^{\sigma+1}W^{2-\sigma})dU + (n-1)UVWdV + \\ & + (cUVW - nUV^2 + U^2V - U^{\sigma+2}W^{1-\sigma})dW = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los puntos en el infinito en Π corresponden a los puntos sobre el semicírculo

$$T = \{U \geq 0, W = 0, U^2 + V^2 = 1\},$$

para el cual la ecuación anterior se reduce a

$$UV(U - nV) = 0. \quad (2.10)$$

Esto da las posibilidades $U = 0$, $V = 0$ y $U = nV$, es decir, los cuatro puntos críticos en T son:

$$\Lambda_1 = (1, 0), \quad \Lambda_2 = \left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right), \quad \Lambda_{3,4} = (0, \pm 1), \quad (2.11)$$

que corresponden, respectivamente, a Q_∞ , R_∞ y $S_{\pm\infty}$. Siguiendo de nuevo [61] podemos obtener el flujo sobre T ,

$$\Lambda_4 \longrightarrow \Lambda_1 \longleftarrow \Lambda_2 \longrightarrow \Lambda_3. \quad (2.12)$$

Para analizar la dinámica alrededor de los dos primeros puntos proyectamos la esfera sobre el plano $U = 1$, y así obtenemos el sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{dW}{d\zeta} = -(n-1)VW \\ \frac{dV}{d\zeta} = V + cVW - nV^2 - W^{1-\sigma}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Los puntos críticos $\Lambda_{1,2}$ son aquí $\lambda_1 = (W, V) = (0, 0)$ y $\lambda_2 = (0, \frac{1}{n})$. Usando el mismo procedimiento que para estudiar el origen en el sistema (2.3), obtenemos que λ_1 es un punto de silla, mientras que λ_2 es un nodo inestable. Por otra parte, para la variedad inestable que surge de λ_1 tenemos el comportamiento local

$$V = \psi(W) = W^{1-\sigma} + o(W^{1-\sigma})$$

cuando $W \rightarrow 0$. Esto conlleva, para la variedad inestable \mathcal{W}_∞^c que proviene de Q_∞ , el comportamiento asintótico

$$Y = \Psi(X) = X^\sigma + o(X^\sigma),$$

cuando $X \rightarrow \infty$. Más adelante necesitaremos una aproximación más precisa de \mathcal{W}_∞^c , en particular, su dependencia de la velocidad c (lema 2.2.10). Esto puede obtenerse por una aplicación directa del teorema de la Variedad Central (ver por ejemplo [21]) al sistema (5.2):

Proposición 2.2.3 *Utilizando la notación anterior tenemos, cuando $X \rightarrow \infty$, el desarrollo*

$$\Psi(X) = \sum_{i=1}^M b_i X^{1-i(1-\sigma)} - cX^{\sigma-1} + o(X^{\sigma-1}), \quad (2.14)$$

donde $\frac{M-2}{M-1} < \sigma \leq \frac{M-1}{M}$, y los coeficientes b_i dependen sólo de σ y n , pero no de c . En particular $b_1 = 1$, $b_2 = (n-1)\sigma + 1$.

Por último, el comportamiento de $S_{\pm\infty}$, correspondientes a $\Lambda_{3,4}$, se puede obtener proyectando nuevamente la esfera de Poincaré, en esta ocasión sobre el plano $V = 1$. El sistema ahora es

$$\begin{cases} \frac{dW}{d\zeta} = W - UW - cW^2 + U^{\sigma+1}W^{2-\sigma} \\ \frac{dU}{d\zeta} = nU - U^2 - cUW + U^{\sigma+2}W^{1-\sigma}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Los puntos críticos $\Lambda_{3,4}$ corresponden aquí al único punto $\lambda_{3,4} = (U, W) = (0, 0)$, pero con la orientación invertida. La matriz jacobiana en el origen es,

$$A(\lambda_{3,4}) = \begin{pmatrix} 1 - \sigma & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix},$$

si $0 \leq \sigma < 1$, (sustituyendo previamente $W_1 = W^{1-\sigma}$), y

$$A(\lambda_{3,4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sigma + 1)n \end{pmatrix},$$

si $-1 < \sigma < 0$, (definiendo $U_1 = U^{\sigma+1}$), lo que implica que $\lambda_{3,4}$ es un nodo. Por consiguiente $\Lambda_{3,4}$ son nodos, cuya estabilidad depende del flujo sobre T , es decir, Λ_3 es un nodo estable y Λ_4 es un nodo inestable. Además, podemos obtener el

comportamiento de las trayectorias que se aproximan a estos puntos: $W_1 \approx U^{\frac{1-\sigma}{n}}$, ó $W \approx U_1^{\frac{1}{(1+\sigma)n}}$, lo que implica $Y \approx X^{\frac{-1}{n-1}}$. Teniendo en cuenta la condición de flujo (2.5), esto explica por qué estas trayectorias no son admisibles.

Nota 2.2.4 *Este análisis también se puede hacer para $|\sigma| \geq 1$, de modo que se obtiene el mismo resultado si $\sigma \geq 1$ ó $\sigma = -1$, y también cuando $\sigma < -1$ y $\frac{\sigma+1}{2} \geq \frac{-1}{n-1}$. En el caso $\frac{\sigma+1}{2} < \frac{-1}{n-1}$ obtenemos el comportamiento asintótico $Y \approx X^{\frac{\sigma+1}{2}}$. Una vez más falla la condición de flujo. Esta observación será de gran importancia en el caso $k < 0$.*

Una vez obtenido el comportamiento de los puntos críticos en el infinito, los incluiremos juntos en un esquema completo con los puntos críticos finitos, considerando ahora la proyección de la esfera de Poincaré sobre el semidisco

$$\Theta = \{U \geq 0, W = 0, U^2 + V^2 \leq 1\}. \quad (2.16)$$

Junto a los cuatro puntos críticos Λ_1 — Λ_4 sobre T , tenemos $\Lambda_5 = (0, \frac{c}{\sqrt{c^2+1}})$, y $\Lambda_6 = (0, 0)$, que corresponden a las proyecciones de P y O , respectivamente. El flujo local en estos puntos, teniendo en cuenta el análisis anterior y (2.12), se refleja en la figura 2.1.

La existencia del perfil de las ondas viajeras se caracteriza por las diferentes conexiones entre los puntos críticos $Q_\infty, R_\infty, S_{\pm\infty}, P$ y O , es decir, los puntos Λ_1 — Λ_6 en Θ . Recordemos que los puntos $S_{\pm\infty}$ ($\Lambda_{3,4}$) dan lugar a trayectorias no admisibles.

Como los puntos críticos son dos sumideros, dos fuentes y dos sillas, solamente tenemos tres posibilidades, representadas por las conexiones desde el punto silla Λ_1 , que son las conexiones silla-nodo $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_3$ y $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_6$, y la conexión silla-silla $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_5$.

- La conexión $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_3$ implica las conexiones $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_3$, y $\Lambda_4 \rightarrow (\Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_6)$. Esto da trayectorias no admisibles.
- La conexión $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_6$ da una OV, e implica las conexiones $\Lambda_2 \rightarrow (\Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_6)$ y $\Lambda_4 \rightarrow \Lambda_6$. Obtenemos también una OV para cada una de las conexiones $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_5$ y $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_6$.

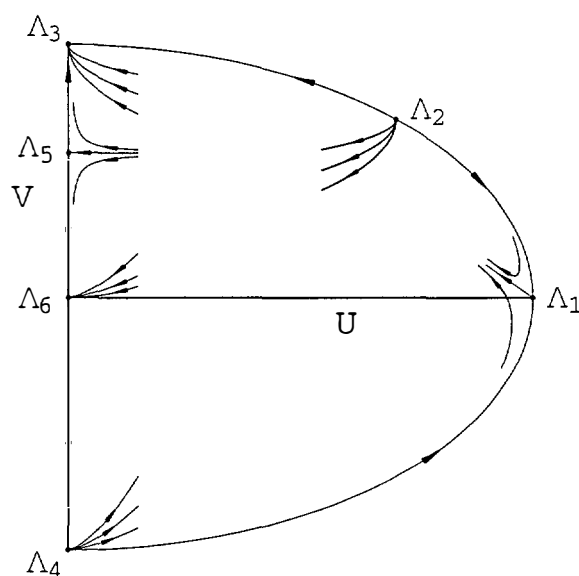


Figura 2.1: El flujo local en los puntos críticos en Θ .

- Finalmente, la conexión silla-silla $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_5$ da una OV y ninguna otra conexión, ni $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_3$, ni $\Lambda_4 \rightarrow \Lambda_6$, son admisibles.

Probaremos que, dentro de las tres situaciones recién descritas, el parámetro c gobierna, a medida que crece, el movimiento del flujo en Θ , ver la figura 2.2. En particular probaremos que existe un único valor de bifurcación de c , la velocidad mínima $c_*(\sigma)$, para el cual se tiene la conexión silla-silla.

Las trayectorias

Regresando al plano XY , las trayectorias $Y = Y(X)$ soluciones de (2.3) tienen

pendiente cero en los puntos del gráfico

$$G = \{ Y^2 - (c + X)Y + X^{\sigma+1} = 0 \}. \quad (2.17)$$

Este gráfico consta de dos curvas, las cuales son diferentes cuando c varía, y también cuando $\sigma >$, $=$, ó < 0 . Para valores pequeños de $c > 0$, tenemos $G = G_l \cup G_r$, donde G_l es la curva izquierda, una curva definida sólo para $0 \leq X \leq X_0$, y que une los puntos críticos, O y P ; la curva derecha G_r está definida para $X \geq X_1 > X_0$, con dos ramas, una que va hacia el infinito linealmente y la otra se comporta como la potencia $Y = X^\sigma$, cuando X tiende al infinito (por tanto, va a infinito, uno o cero de acuerdo al signo de σ).

Cuando c crece, las curvas izquierda y derecha de G se mueven una hacia la otra, coincidiendo en el valor

$$c_0(\sigma) = (1 - \sigma)(1 + \sigma)^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}}, \quad (2.18)$$

y tenemos $X_0 = X_1$. Cuando $c > c_0$, tenemos $G = G_+ \cup G_-$, ambas curvas definidas para todo $X \geq 0$, la curva superior G_+ , partiendo de P , va a infinito linealmente, la curva inferior G_- , partiendo del origen, se comporta como $Y = X^\sigma$, cuando $X \rightarrow \infty$.

Nota 2.2.5 Si $c = 0$ existe sólo la curva derecha, $G = G_r$. Es fácil comprobar entonces que no existen trayectorias admisibles cuando $-1 < \sigma < 1$.

El caso $\sigma = 0$ es especialmente sencillo

Teorema 2.2.6 Cuando $\sigma = 0$ la velocidad mínima es $c_*(0) = 1$.

Demostración: En este caso tenemos $c_0(0) = 1$. Para $0 < c < 1$, las curvas que definen G satisfacen

$$G_l < 1 < G_r.$$

Por tanto, cada trayectoria que pasa por P ó O debe cruzar el eje X y no es admisible.

Para $c = 1$, G se define por las dos rectas

$$G = \{ (Y - 1)(Y - X) = 0 \},$$

y la única trayectoria admisible es la curva explícita $Y \equiv 1$, correspondiente a la conexión $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_5$. Notemos que esta trayectoria produce una OV con perfil explícito.

Para $c > 1$ tenemos

$$G_- < 1 < G_+.$$

Por tanto, cada trayectoria que pasa a través de los puntos $(A, 1)$, $A > 0$, da una conexión $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_6$. También tenemos una trayectoria que viene de $(\infty, 1)$ y entra linealmente en O ($\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_6$), y una trayectoria que viene linealmente del infinito y entra en P ($\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_5$). #

Lema 2.2.7 *Si $-1 < \sigma < 1$, y $c > 0$ es suficientemente pequeño, el sistema (2.3) no posee trayectorias admisibles.*

Demostración:

$\sigma > 0$. Sea $0 < c < c_0(\sigma)$ y supongamos que

$$\sup\{Y > 0 : (X, Y) \in G_l\} < \inf\{Y > 0 : (X, Y) \in G_r\}. \quad (2.19)$$

En este caso todas las trayectorias que parten del punto crítico P son decrecientes para $X > X_0$. Como no pueden tener límite nulo cuando X tiende a infinito ($\sigma > 0$ implica que $\frac{dY}{dX}$ toma valores muy negativos para X grande, $Y > 0$ fijo), concluimos una vez más que estas trayectorias atraviesan el eje X .

Probemos lo supuesto anteriormente. Derivando la igualdad en (2.17),

$$Y' = \frac{Y - (\sigma + 1)X^\sigma}{2Y - c - X} \quad (2.20)$$

obtenemos que los puntos en los cuales el gráfico de G tiene tangente horizontal pertenecen a la curva $Y = R(X) = (\sigma + 1)X^\sigma$. La conclusión deseada se sigue del crecimiento de esta curva.

Observemos también que cuando $c = c_0(\sigma)$, las curvas que definen G son crecientes, se cortan en el punto $(X_1, Y_1) = (\frac{1-\sigma}{1+\sigma}c, \frac{1}{1-\sigma}c)$, y tienen en este punto

pendientes $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}) > 0$. Las trayectorias que parten del punto P no pueden pasar a través de este punto y la situación es la misma que para $c < c_0(\sigma)$.

$\sigma < 0$. La demostración en este caso consiste en probar que para algún $A > 0$ suficientemente pequeño, las trayectorias para $0 \leq c < A$ no pueden cruzar la línea $Y = H(X) = A(1 - X)$ de izquierda a derecha. Esto se sigue de la observación de que

$$(n-1)H'(X) - F(X, H) = \frac{1}{XH} [X^{\sigma+1} + A(An+1)X^2 - A(An+A+1-c)X + A(A-c)] > \frac{1}{XH} (1 - A - A^2n) > 0,$$

para todo $0 < X < 1$, eligiendo $A > 0$ pequeño y $0 \leq c < A$. Se deduce que las trayectorias que parten de los puntos críticos O ó P deben atravesar el eje X en algún $0 < X < 1$, y son por lo tanto no admisibles. #

Lema 2.2.8 Si $-1 < \sigma < 1$ y $c > 0$ es suficientemente grande, el sistema (2.3) posee un continuo de trayectorias admisibles.

Demostración:

$\sigma < 0$. Si $c > c_0(\sigma)$, y de acuerdo a (2.20), obtenemos que los puntos en los cuales el gráfico G tiene tangente horizontal pertenecen a una curva decreciente. Esto implica que, si los puntos X_- y X_+ están definidos por

$$G_-(X_-) = \max G_-(X), \quad G_+(X_+) = \min G_+(X),$$

entonces

$$G_-(X_-) > G_+(X_+) \implies X_- < X_+.$$

Obtenemos trayectorias admisibles disparando desde los puntos que están sobre la curva $G_r \cap G_-$, desde los puntos de la curva $G_l \cap G_+$, todos ellos entrando en O , (las conexiones $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_6$).

$\sigma \geq 0$. La demostración en este caso es la misma, con la introducción previa del cambio de variables $H = YX^{-\sigma}$. Los puntos en los cuales el gráfico

$$\Gamma = \{H' = 0\} = \{\lambda X^\sigma H^2 - (c + X)H + X = 0\},$$

con $\lambda = (1 + (n-1)\sigma)$, tiene tangente horizontal, pertenecen a la curva decreciente $H = \frac{(1-\sigma)X}{(1-\sigma)X - c\sigma}$, siempre que $c > c_1(\sigma) = \lambda^{\frac{1}{1-\sigma}} c_0(\sigma)$. Debemos notar que el origen en el plano XH da lugar a trayectorias admisibles. #

Nota 2.2.9 Como un subproducto de los cálculos anteriores hemos obtenido las estimaciones $c_*(\sigma) < c_1(\sigma)$, si $\sigma > 0$ y $c_*(\sigma) < c_0(\sigma)$, si $\sigma < 0$. El mismo argumento permite mejorar la estimación del lema 2.2.7 para $\sigma \leq 0$, al menos cuando $\sigma \geq -1/(n-1)$, y por tanto $c_*(\sigma) > c_1(\sigma)_+$.

La conexión silla-silla

Probaremos ahora la existencia de la velocidad mínima $c_*(\sigma)$.

Lema 2.2.10 Sea $\mathcal{W}_\infty^c = \{Y = \Psi_c(X)\}$ la trayectoria que parte del punto del infinito Q_∞ , y sea $\mathcal{W}_P^c = \{Y = \Phi_c(X)\}$ la trayectoria que entra en el punto $P = (0, c)$. Entonces, para cada $X > 0$ se tiene

$$c_1 < c_2 \implies \begin{cases} \Phi_{c_1}(X) < \Phi_{c_2}(X) \\ \Psi_{c_1}(X) > \Psi_{c_2}(X). \end{cases}$$

Demostración: Es claro que $\Phi_{c_1}(X) < \Phi_{c_2}(X)$ para X próximo a cero. Supongamos que existe $\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi_{c_1}(X) &< \Phi_{c_2}(X) && \text{para } 0 < X < \eta \\ \Phi_{c_1}(\eta) &= \Phi_{c_2}(\eta). \end{aligned}$$

Entonces $\Phi'_{c_1}(\eta) \geq \Phi'_{c_2}(\eta)$. Pero el miembro derecho en la ecuación diferencial (2.4), satisfecha por Φ , es monótona creciente en c , con lo cual llegamos a una contradicción. El mismo argumento puede ser aplicado a Ψ , usando en este caso el comportamiento asintótico de \mathcal{W}_∞^c (ver (2.14)), de lo cual concluimos $\Psi_{c_1}(X) > \Psi_{c_2}(X)$ para todo X suficientemente grande. #

Corolario 2.2.11 Fijemos $\overline{X} > 0$, y definamos

$$\rho_\infty(c) = \Psi_c(\overline{X}), \quad \rho_p(c) = [\Phi_c(\overline{X})]_+.$$

Entonces $\rho_\infty(c)$ es estrictamente creciente y $\rho_p(c)$ es no creciente.

Fin de la prueba del teorema 2.2.2. Pongamos $\rho(c) = \rho_p(c) - \rho_\infty(c)$. Sabemos que $\rho(c) < 0$ para valores de c pequeños, mientras que $\rho(c) > 0$ para valores de c grandes. También $\rho(c)$ es continua y estrictamente creciente. Por consiguiente existe un único valor $c = c_*(\sigma)$ para el cual $\rho(c) = 0$, es decir, tenemos que $\mathcal{W}_p^c = \mathcal{W}_\infty^c$, la conexión $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_5$. #

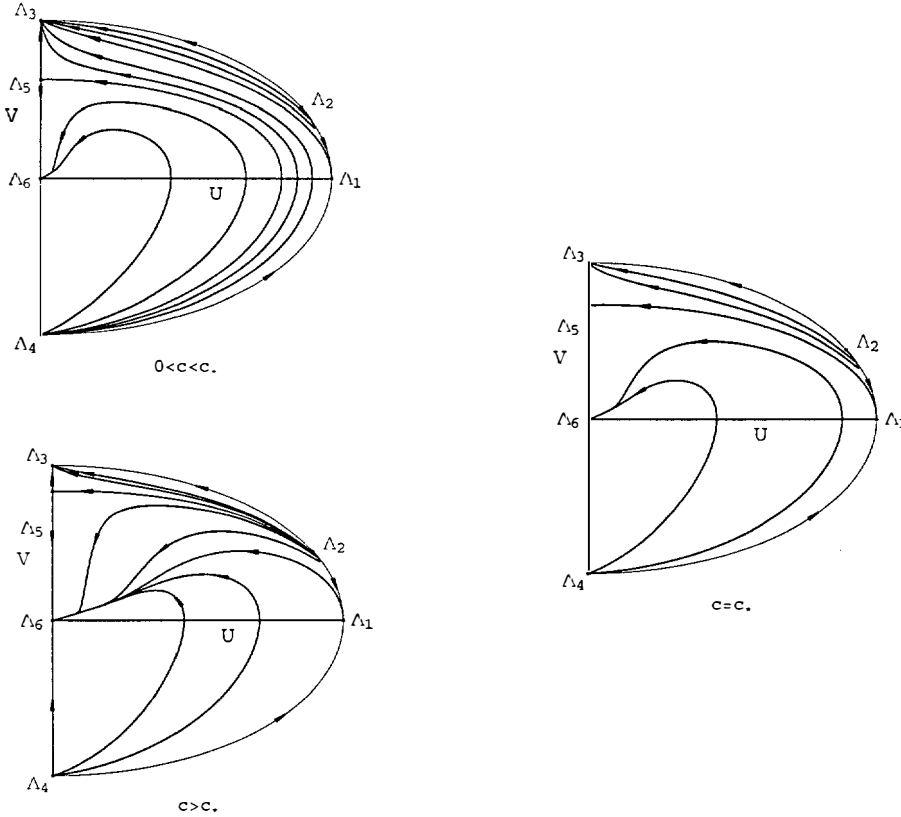


Figura 2.2: Las diferentes conexiones en Θ para $k_0 = 1$, $\epsilon = +1$, $-1 < \sigma < 1$ y $c > 0$.

En el curso de la demostración hemos caracterizado el número de trayectorias admisibles, que resumiremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.12 *Sea $-1 < \sigma < 1$. Entonces:*

- i) *si $c = c^*(\sigma)$ existe una única trayectoria admisible que llega al punto $(0, c)$;*
- ii) *si $c > c^*(\sigma)$ existe una única trayectoria que llega al punto $(0, c)$ e infinitas que llegan al origen.*

2.2.2 Caso límite $\sigma = -1$

Teorema 2.2.13 *Si $\sigma = -1$ existen trayectorias admisibles si y sólo si $c \geq 2$, es decir, la velocidad mínima es $c^*(-1) = 2$.*

Demostración: La diferencia que aparece con el caso anterior es el comportamiento cerca del origen. De la ecuación de las trayectorias (2.4) tenemos que $\frac{dY}{dX} = 0$ a lo largo de la curva $X = g(Y) = Y + \frac{1}{Y} - c$, y por tanto no existen puntos críticos finitos si $0 \leq c < 2$.

Si $c = 2$ el único punto crítico $P_2 = (0, 1)$ es un punto silla-nodo, que tiene como variedad central el eje Y , como región silla $\{Y > 1 + \frac{1}{n-1}X\}$ y como región nodo $\{Y < 1 + \frac{1}{n-1}X\}$. Para deducir esto escribimos la matriz jacobiana de (2.3) en P_2

$$A(P_2) = \begin{pmatrix} -(n-1) & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y vemos que P_2 es nuevamente un punto no hiperbólico. Consideramos el cambio de variables

$$Z = -X + (n-1)(Y-1), \quad H = X, \quad \eta = -(n-1)\zeta, \quad (2.21)$$

que transforma (2.3) en

$$\begin{cases} \frac{dZ}{d\eta} = -\frac{1}{(n-1)^2}(Z+H)^2 = \tilde{F}_1(Z, H) \\ \frac{dH}{d\eta} = H + \frac{1}{n-1}(Z+H)H = \tilde{F}_2(Z, H), \end{cases} \quad (2.22)$$

con el único punto crítico $Z = H = 0$ y (2.7) como su matriz jacobiana en el origen. Si $\tilde{F}_2(Z, H) = 0$ en una vecindad del origen entonces $H = 0$. Como $\tilde{F}_1(Z, 0) = -\frac{1}{(n-1)^2}Z^2$, el origen es un punto silla-nodo, que tiene como variedad central al eje Z y como región hiperbólica $Z > 0$, ver [20]. Esto da los sectores hiperbólico y parabólico mencionados anteriormente. Además, la variedad estable de P_2 , tangente a la recta $Y = 1 + \frac{1}{n-1}X$, va hacia infinito cuando $\xi \rightarrow -\infty$ como $Y = \frac{1}{n}X$ (el punto R_∞). Todas las demás curvas van a ser tangentes al eje Y . Esto da el comportamiento alrededor de P_2 . Partiendo de puntos de la curva $X = g(Y)$ con $Y < 1$, obtenemos trayectorias que van por la izquierda (cuando $\zeta \rightarrow \infty$) a P_2 y por la derecha (cuando $\zeta \rightarrow -\infty$) a R_∞ . Partiendo ahora de los puntos sobre el eje X , las trayectorias llegan al punto P_2 . Ya que el punto $Q_\infty = (\infty, 0)$ es topológicamente un punto de silla (ver(5.2)), su variedad central es una separatriz entre las curvas anteriores y llega al punto P_2 .

Si $c > 2$ tenemos dos puntos críticos, $D_i = (0, z_i)$, correspondientes a las soluciones $0 < z_1 < z_2$ de la ecuación $Y^2 - cY + 1 = 0$. La matriz jacobiana en estos puntos es

$$A(D_i) = \begin{pmatrix} -(n-1)z_i & 0 \\ -z_i & 2z_i - c \end{pmatrix}.$$

Como $z_1 < c/2 < z_2$, el punto D_1 es un nodo estable, (un nodo degenerado si $c = (n+1)/\sqrt{n}$), y el punto D_2 es una silla. En efecto, el punto silla-nodo P_2 correspondiente al caso $c = 2$ se divide en una silla y un nodo para $c > 2$. Por tanto se concluye fácilmente que existe un continuo de trayectorias admisibles que van a D_1 , una desde Q_∞ e infinitas desde R_∞ , y una trayectoria que llega a D_2 desde R_∞ . La representación en Θ es entonces la misma que para $-1 < \sigma < 1$ si $c > 2$, donde,

en este caso, $\Lambda_{5,6} = (0, \frac{z_i}{\sqrt{1+z_i^2}})$. Notemos que si $c = 2$ se tiene que $\Lambda_5 = \Lambda_6 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y las conexiones $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_5$, $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_5$ no representan una trayectoria única. Con esto se concluye la demostración. #

Proposición 2.2.14 Sea $\sigma = -1$. Entonces:

- i) si $c = 2$ existen infinitas trayectorias admisibles que llegan al punto $(0, 1)$;
- ii) si $c > 2$ existe una única trayectoria que llega al punto $(0, z_2)$ e infinitas que llegan al punto $(0, z_1)$.

2.2.3 Caso límite $\sigma = 1$

Teorema 2.2.15 Si $\sigma = 1$ la velocidad mínima es 0 para $0 < k_0 \leq \frac{1}{4n}$, mientras que es ∞ para $k_0 > \frac{1}{4n}$.

Demostración: Ahora la diferencia con el caso interior $|\sigma| < 1$ la proporciona el comportamiento en el infinito. Aquí tenemos que la ecuación de las trayectorias es

$$(n-1)\frac{dY}{dX} = 1 + \frac{c-Y}{X} - k_0\frac{X}{Y} \equiv F(X, Y), \quad (2.23)$$

con $k_0 > 0$. La ecuación que caracteriza los puntos críticos en el ecuador de la esfera de Poincaré es

$$U(k_0U^2 - UV + nV^2) = 0. \quad (2.24)$$

Obtenemos que junto a $\Lambda_{3,4}$, los puntos críticos Λ_1 y Λ_2 existen si sólo si $k_0 \leq \frac{1}{4n}$, y ellos corresponden a $V = \lambda_{\pm}U$ con $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4nk_0}}{2n}$. Tenemos que Λ_1 es un punto silla, mientras que Λ_2 es un nodo inestable, coincidiendo ambos en un punto silla-nodo cuando $k_0 = \frac{1}{4n}$. Como una primera conclusión, no existen OV si $k_0 > \frac{1}{4n}$. Ahora pongamos $H = \frac{Y}{X}$ y observemos el plano XH . Se ve fácilmente que la variedad inestable que parte del punto silla (∞, λ^-) debe dirigirse al origen. Esto da lugar a la conexión $Q_{\infty} \rightarrow O$ en el plano XY , lo que implica que todas las demás trayectorias

que llegan a O por encima de esta conexión vienen de R_∞ , y también la variedad central que llega a P viene de R_∞ . Todas estas trayectorias son admisibles. Para $k_0 = \frac{1}{4n}$ ó $c = 0$ puede aplicarse el mismo análisis.

De esta forma obtenemos un continuo de trayectorias admisibles, excepto para el caso $c = 0$ y $k_0 = \frac{1}{4n}$, donde existe una única trayectoria, que es explícita, $Y = \frac{1}{2n}X$.

#

Proposición 2.2.16 *Sea $\sigma = 1$. Entonces:*

- i) *si $c > 0$ y $0 < k_0 \leq \frac{1}{4n}$ existe una única trayectoria admisible que llega al punto $(0, c)$ e infinitas que llegan al origen;*
- ii) *si $c = 0$ y $0 < k_0 < \frac{1}{4n}$ existen infinitas trayectorias admisibles que llegan al origen;*
- iii) *si $c = 0$ y $k_0 = \frac{1}{4n}$ existe una única trayectoria admisible que llega al origen.*

2.2.4 Caso $b < 0$

El caso $b < 0$ ($\epsilon = -1$) puede obtenerse por reflexión considerando ondas por la izquierda. Los cálculos anteriores muestran que no hay OV por la izquierda para $c \geq 0$. También para $c < 0$ obtenemos que los puntos críticos $\Lambda_{1,2}$ cambian su estabilidad. De aquí que tengamos cinco puntos de salida y sólo uno de llegada en Θ , es decir, no hay OV.

2.2.5 La condición de acotación

Seleccionaremos aquí cuales de las trayectorias obtenidas en las cuatro subsecciones previas, dan lugar a ondas viajeras acotadas (globales), es decir, satisfacen la condición de acotación (2.6), y finalizamos de esta manera la demostración del teorema 2.1.1 para $n > 1$.

Si $-1 < \sigma < 1$, las trayectorias conectan el eje Y con los dos puntos del infinito Λ_1 y Λ_2 . Las conexiones con λ_1 se comportan como X^σ , y, por tanto, la condición de acotación es $p \leq n$. Para Λ_2 el comportamiento es lineal, luego la condición es $m \geq n$. Como $2 < m + p < 2n$, concluimos que existen OV globales si y sólo si $p \leq n$. Si además $m < n$, tenemos que solamente las conexiones $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_6$ son globales. Esto da lugar a una única OV global para cada velocidad $c \geq c_*$. Por el contrario, si $m \geq n$ tenemos una única OV global cuando $c = c_*$ y un continuo de OV para cada velocidad $c > c_*$, correspondiente a todas las conexiones desde Λ_2 .

Cuando $\sigma = -1$ la representación en el infinito es la misma, la única diferencia ocurre para $X \rightarrow 0$. Tenemos aquí el mismo resultado, excepto por el número de ondas, que es infinito para ambos casos $c = c_*$ y $c > c_*$.

Por último, si $\sigma = 1$ todas las trayectorias tienden linealmente a infinito. Por consiguiente la condición de acotación es $m \geq n$, que es equivalente a $p \leq n$, ya que $m + p = 2n$. Así pues, existe un continuo de ondas globales para cada velocidad $c > 0$ ó $k_0 < \frac{1}{4n}$. En el caso $c = 0$ y $k_0 = \frac{1}{4n}$, existe una única onda global. #

2.3 Caso $k > 0$, $0 < n < 1$

Este caso puede reducirse mediante una transformación al caso $n > 1$. Tenemos el mismo resultado que en la sección anterior, con una velocidad mínima $c_*(\sigma, n)$ expresada en términos de la velocidad mínima de este caso.

Teorema 2.3.1 *Cuando $k_0 > 0$ y $0 < n < 1$, existen soluciones en forma de OV para la ecuación (1.9) si y sólo si $|\sigma| \leq 1$, $\epsilon = +1$, $p \leq 1$ y $c \geq c_*(\sigma, n)$. Además, la velocidad mínima c_* satisface*

i) si $-1 < \sigma < 1$,

$$c_*(\sigma, n) = n^{\frac{1}{1-\sigma}} [c_*(-\sigma, 1/n)]^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}}. \quad (3.1)$$

ii) $c_*(-1, n) = 2$.



iii)

$$c_*(1, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 4k_0n \leq 1 \\ \infty & \text{si } 4k_0n > 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Demostración: En lugar de (2.1) consideramos aquí las variables

$$X = \varphi^{1-n}, \quad Y = -\varphi^{m-n-1}\varphi'. \quad (3.3)$$

La ecuación de las trayectorias es entonces

$$(1-n)\frac{dY}{dX} = c + \frac{\epsilon - nY}{X} - k_0\frac{X^{-\sigma}}{Y}. \quad (3.4)$$

Si $c \neq 0$ realizamos el cambio de variables

$$Z = \delta X, \quad H = \frac{n\delta}{|c|}Y, \quad (3.5)$$

y definimos los nuevos parámetros

$$\hat{n} = \frac{1}{n}, \quad \hat{\sigma} = -\sigma, \quad \hat{\epsilon} = \text{sign } c, \quad \hat{c} = \frac{\delta\epsilon}{|c|}, \quad k_1 = \frac{k_0n}{c^2}\delta^{1+\sigma}, \quad (3.6)$$

llegando a la ecuación

$$(\hat{n} - 1)\frac{dH}{dZ} = \hat{\epsilon} + \frac{\hat{c} - H}{Z} - k_1\frac{Z^{\hat{\sigma}}}{H}. \quad (3.7)$$

Observemos que esta ecuación coincide con (2.4), donde $\hat{n} > 1$ y $-1 \leq \hat{\sigma} \leq 1$. Primeramente concluimos que debe ser $c > 0$ para tener $\hat{\epsilon} = +1$, y $\epsilon = +1$ para obtener $\hat{c} > 0$ (ver el lema 2.2.1 y la subsección 2.2.4).

Además la condición de flujo es (2.5) con n reemplazado por \hat{n} . La condición de acotación es en este caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X^{\frac{m-1}{1-n}}}{Y(X)} dX = \infty. \quad (3.8)$$

Usando los resultados de la sección previa obtenemos:

i) Si $|\sigma| > 1$ no hay OV.

ii) Si $|\sigma| < 1$ seleccionamos $\delta = \left(\frac{c^2}{n}\right)^{\frac{1}{1+\sigma}}$ y así obtenemos $k_1 = 1$, (se tenía $k_0 = 1$), lo cual implica $c = (n\hat{c}^{1+\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}$. Por tanto obtenemos la velocidad mínima $\hat{c}_* = c_*(\hat{\sigma}, \hat{n})$, que implica la velocidad mínima $c_*(\sigma, n)$ dada anteriormente.

- iii) Si $\sigma = -1$ tenemos $k_1 = \frac{n}{c^2}$. Como para $\hat{\sigma} = 1$ y $\hat{n} > 1$ existen OV si y sólo si $k_1 \leq \frac{1}{4\hat{n}}$, concluimos $c \geq 2$.
- iv) Si $\sigma = 1$, y con $\delta = \frac{c}{\sqrt{k_0 n}}$, tenemos $\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{k_0 n}}$. Ya que $c_*(-1, \hat{n}) = 2$, se tiene que existen OV si y sólo si $\hat{c} \geq 2$, es decir, $0 < k_0 \leq \frac{1}{4n}$.

El caso $c = 0$ puede ser analizado directamente.

Por último, la condición de acotación (3.8) implica $p \leq 1$.

#

2.4 La función $c = c_*(\sigma, n)$

Estudiaremos en esta sección algunas propiedades de la función $c = c_*(\sigma, n)$ que representa la velocidad mínima de las OV. En virtud de la fórmula (3.1) podemos concentrarnos en el caso $n > 1$. Las estimaciones de la sección 3 (lemas 2.2.7, 2.2.8) implican, para $n > 1$:

$$c_0(\sigma) < c_*(\sigma, n) < c_1(\sigma, n) \quad \text{para} \quad 0 < \sigma < 1, \quad (4.1)$$

$$\max\{c_2(n), c_1(\sigma, n)\} < c_*(\sigma, n) < c_0(\sigma) \quad \text{para} \quad -1 \leq \sigma < 0,$$

donde

$$\begin{aligned} c_0(\sigma) &= (1 - \sigma)(1 + \sigma)^{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}, \\ c_1(\sigma, n) &= (\sigma(n - 1) + 1)^{\frac{1}{1-\sigma}} c_0(\sigma), \\ c_2(n) &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4n}}. \end{aligned}$$

También se cumple,

$$\begin{aligned} c_0(0) &= c_1(0) = 1, \\ \lim_{\sigma \rightarrow 1} c_0(\sigma) &= \lim_{\sigma \rightarrow 1} c_1(\sigma, n) = \infty, \\ \lim_{\sigma \rightarrow -1} c_0(\sigma) &= 2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow -1} c_1(\sigma, n) = 2\sqrt{2-n} \quad \text{si } 1 < n \leq 2.$$

Si reescribimos los resultados previos en términos de todos los parámetros que aparecen en la ecuación (1.1), obtenemos que para $m+p = 2n$ existen OV (para cada velocidad $s \geq 0$), si y sólo si

$$\frac{ak}{b^2} \leq \frac{1}{4n}. \tag{4.3}$$

Por otra parte, para $n+1 < m+p < 2n$, las estimaciones sobre la velocidad mínima s_* son

$$\begin{aligned} s_* &> b(1-\sigma) \left[(1+\sigma)^{1+\sigma} \frac{ak}{b^2} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ s_* &< b(1-\sigma) \left[(1+\sigma)^{1+\sigma} (1+(n-1)\sigma) \frac{ak}{b^2} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Tomando límite, en esta expresión, cuando $m+p-2n \rightarrow 0^-$, obtenemos

$$\begin{aligned} s_* &= 0 & \text{si } \frac{ak}{b^2} &\leq \frac{1}{4n} \\ s_* &= \infty & \text{si } \frac{ak}{b^2} &> \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Esto muestra un hueco entre $\frac{1}{4n}$ y $\frac{1}{4}$ en las estimaciones, que implica también un hueco en las estimaciones para la velocidad mínima cuando $0 < n < 1$ y $m+p-2 \rightarrow 0^-$.

La curva $c = c_*(\sigma, n)$ para $n > 1$ obtenida numéricamente se muestra en la figura 4.1.

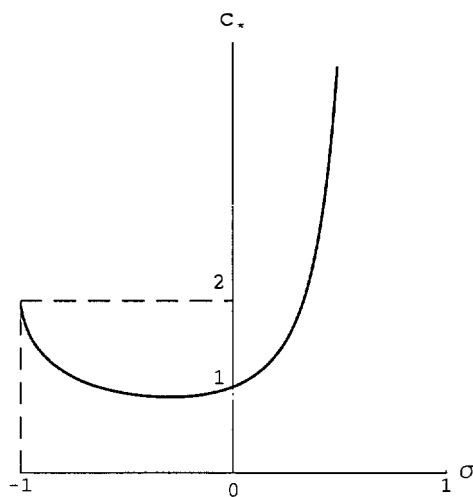


Figura 4.1: La curva $c = c_*(\sigma, n)$ para $n > 1$.

Por otra parte, la función $c = c_*(\sigma, n)$ puede ser obtenida usando el TFI como hicimos en el capítulo 1, aplicado a una cierta relación implícita entre c , σ y n . El punto de partida es la solución conocida de (4.11) dada para $\sigma = 0$ y $c = \ell$ para cada $n \neq 1$. Como un subproducto obtendremos la derivada de c_* respecto a σ en $\sigma = 0$, para cada valor de $n \neq 1$, gracias a que tenemos la expresión explícita de la correspondiente trayectoria en (2.4).

Teorema 2.4.1 *La función $c = c_*(\sigma, n)$ es analítica como función de $\sigma \in (-1, 1)$ para cada $n > 0$, $n \neq 1$. Además, si $n > 1$ tenemos*

$$\frac{\partial c_*}{\partial \sigma}(0, n) = n - 1 + \log(n - 1) + \overline{\Psi}(1/(n - 1)) \equiv \gamma(n), \quad (4.6)$$

y si $0 < n < 1$,

$$\frac{\partial c_*}{\partial \sigma}(0, n) = n(\log n - \gamma(\frac{1}{n})), \quad (4.7)$$

donde $\overline{\Psi}$ es la **función digamma**, la derivada logarítmica de la función gamma.

Demostración: Demostraremos el teorema y deduciremos la fórmula para el caso $n > 1$, el caso $n < 1$ se sigue de (3.1). Como hemos dicho, nos apoyaremos en la solución explícita para $\sigma = 0$ obtenida de la trayectoria $Y(X) \equiv 1$ con $c = 1$ en (2.4). Así pues, disparamos desde los puntos de silla P y Q_∞ , usamos la trayectoria que los une para $(c, \sigma) = (1, 0)$ y el TFI con el fin de obtener la conexión para $\sigma \neq 0$.

Para $c > 0$, $-1 < \sigma < 1$, $n > 1$ y $\bar{X} > 0$ fijos, consideremos las trayectorias $Y_1 = \Phi$ y $Y_2 = \Psi$ que salen de los puntos P y Q_∞ respectivamente:

$$Y_1(\cdot, c, \sigma, n) : [0, \bar{X}] \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad Y_1(0, c, \sigma, n) = c, \quad (4.8)$$

$$Y_2(\cdot, c, \sigma, n) : [\bar{X}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \lim_{X \rightarrow \infty} Y_2(X, c, \sigma, n)X^{-\sigma} = 1,$$

con

$$(n-1) \frac{\partial Y_i}{\partial X}(X, c, \sigma, n) = F(X, Y_i, c, \sigma) \equiv 1 + \frac{c - Y_i}{X} - \frac{X^\sigma}{Y_i}. \quad (4.9)$$

Supondremos $Y_1(\bar{X}, c, \sigma, n) > 0$. De hecho, para cada $|\sigma| < 1$, $n > 1$, existen \bar{c} y \bar{X} tales que la suposición anterior es cierta para $c \geq \bar{c}$, aunque no necesitamos ninguna información sobre \bar{X} ni \bar{c} . (Por ejemplo, si $\sigma > 0$ podemos seleccionar $\bar{X} = 1$ y $\bar{c} = c_0(\sigma)$).

Definamos ahora la función (analítica) $\rho : (0, \infty) \times (-1, 1) \times (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\rho(c, \sigma, n) = Y_1(\bar{X}, c, \sigma, n) - Y_2(\bar{X}, c, \sigma, n). \quad (4.10)$$

La existencia de una conexión para algún c y σ es equivalente a la condición de ligadura

$$\rho(c, \sigma, n) = 0. \quad (4.11)$$

El TFI permite definir $c = c_*(\sigma, n)$ en una vecindad de cualquier solución (c, σ, n) de (4.11) cuando se satisface la condición de transversalidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial c}(c_*(\sigma, n), \sigma, n) \neq 0. \quad (4.12)$$

Para probar esta condición definimos

$$z_i(X) = \partial Y_i / \partial c(X, c, \sigma, n), \quad i = 1, 2, \quad (4.13)$$

y demostraremos que $z_1(\overline{X}) - z_2(\overline{X}) \neq 0$. Diferenciando (2.4) respecto al parámetro c obtenemos

$$(n-1)\frac{dz_i}{dX} = \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y_i}{\partial c} = A_i z_i + B, \quad (4.14)$$

con

$$A_i(X) = \frac{-1}{X} + \frac{X^\sigma}{Y_i^2}, \quad B(X) = \frac{1}{X}. \quad (4.15)$$

Proposición 2.4.2 *Las soluciones de las ecuaciones (4.14) con las condiciones de contorno dadas en (4.8) son*

$$\begin{aligned} z_1(X) &= \frac{1}{n-1} \int_0^X s^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma_1(X, s) ds \\ z_2(X) &= -\frac{1}{n-1} \int_X^\infty s^{\frac{2-n}{n-1}} \Gamma_2(X, s) ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $\Gamma_i(X, s) = X^{-1/(n-1)} \exp \left[\frac{1}{n-1} \int_s^X \frac{u^\sigma}{Y_i^2(u)} du \right]$.

Demostración:

Las soluciones generales de (4.14) son

$$\begin{aligned} z_1(X) &= \frac{1}{n-1} G_1(X) \left[K_1 + \int_0^X \frac{B(s)}{G_1(s)} ds \right], \\ z_2(X) &= \frac{1}{n-1} G_2(X) \left[K_2 - \int_X^\infty \frac{B(s)}{G_2(s)} ds \right] \end{aligned}$$

con $G_i(X) = \exp \left[\frac{1}{n-1} \int_1^X A_i(s) ds \right]$. Mediante integración directa, y usando (4.8), se obtiene

$$G_1(X) \approx X^{\frac{-1}{n-1}} \quad \text{cuando } X \rightarrow 0$$

$$G_2(X) \approx X^{\frac{-1}{n-1}} \exp \left[\frac{X^{1-\sigma}}{(n-1)(1-\sigma)} \right] \quad \text{cuando } X \rightarrow \infty,$$

y también

$$\lim_{X \rightarrow 0} G_1(X) \int_0^X \frac{B(s)}{G_1(s)} ds = n - 1$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} G_2(X) \int_X^\infty \frac{B(s)}{G_2(s)} ds = 0.$$

Por otra parte, nuevamente de (4.8), obtenemos las condiciones de contorno

$$z_1(0) = 1, \quad z_2(X) = o(X^\sigma) \text{ cuando } X \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Esto implica $K_1 = K_2 = 0$ y, por tanto la expresión (4.16). #

Como $\Gamma_i(X, s) > 0$ para cada $s \neq X$, hemos obtenido $z_2 < 0 < z_1$, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial c}(c_*(\sigma, n), \sigma, n) = z_1(\bar{X}) - z_2(\bar{X}) > 0, \quad (4.18)$$

lo que significa que se cumple la condición de transversalidad.

Como $(c, \sigma, n) = (1, 0, n)$ es una solución de (4.11), obtenemos la existencia de una función analítica $c_*(\sigma, n)$ definida en una vecindad de $\sigma = 0$ para cada $n > 1$. Además, la condición de transversalidad es uniforme para $|\sigma| < 1$, así que podemos prolongar el rango de existencia a un intervalo maximal abierto (en $(-1, 1)$). Pasando al límite es fácil ver que este intervalo maximal de existencia es un conjunto cerrado en $(-1, 1)$ y es por lo tanto el intervalo completo $(-1, 1)$. Esto prueba la primera parte del teorema.

Ahora, de la ecuación (4.11) obtenemos la expresión para la derivada

$$\frac{\partial c_*}{\partial \sigma}(\sigma, n) = \frac{-\partial \rho / \partial \sigma}{\partial \rho / \partial c}(c_*(\sigma, n), \sigma, n). \quad (4.19)$$

Debemos pues estudiar $\partial \rho / \partial \sigma$. Análogamente a (4.13) definamos

$$\theta_i(X) = \partial Y_i / \partial \sigma(X, c, \sigma, n) \quad i = 1, 2.$$

Tenemos

$$(n-1) \frac{d\theta_i}{dX} = A_i \theta_i + D_i,$$

con

$$D_i(X) = \frac{-X^\sigma \log X}{Y_i(X)}. \quad (4.20)$$

También obtenemos

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(X) = o(X^\sigma) \quad \text{cuando } X \rightarrow \infty, \quad (4.21)$$

y como antes deducimos

$$\theta_1(X) = -\frac{1}{n-1} \int_0^X \frac{s^{\sigma+\frac{1}{n-1}} \log s}{Y_1(s)} \Gamma_1(X, s) ds$$

$$\theta_2(X) = \frac{1}{n-1} \int_X^\infty \frac{s^{\sigma+\frac{1}{n-1}} \log s}{Y_2(s)} \Gamma_2(X, s) ds.$$

En la solución $\rho(c_*(\sigma, n), \sigma, n) = 0$ tenemos $Y(X) = Y_1(X) = Y_2(X)$, y por tanto

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial \sigma}(c_*(\sigma, n), \sigma, n) &= \theta_2(\bar{X}) - \theta_1(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{n-1} X^{\frac{-1}{n-1}} \int_0^\infty \frac{s^{\sigma+\frac{1}{n-1}} \log s}{Y(s)} \exp \left[\frac{1}{n-1} \int_s^X \frac{u^\sigma}{Y^2(u)} du \right] ds. \end{aligned}$$

Del resultado (4.18) sabemos que el signo de esta integral debe dar la monotonía de c_* respecto a σ . La conjetura es que c_* es estrictamente creciente para $\sigma > \sigma_0$ y algún $-1 < \sigma_0 < 0$.

Para realizar el cálculo de la derivada de c_* respecto de σ en $\sigma = 0$, sustituimos la conexión explícita $Y(X) = Y_1(X, 1, 0, n) = Y_2(X, 1, 0, n) = 1$, y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_*}{\partial \sigma}(0, n) &= \frac{-\partial \rho / \partial \sigma}{\partial \rho / \partial c}(1, 0, n) = \frac{\theta_2(\bar{X}) - \theta_1(\bar{X})}{z_1(\bar{X}) - z_2(\bar{X})} \\ &= \left(\int_0^\infty e^{\frac{-s}{n-1}} s^{\frac{1}{n-1}} \log s ds \right) \left(\int_0^\infty e^{\frac{-s}{n-1}} s^{\frac{2-n}{n-1}} ds \right)^{-1} \\ &= \frac{(n-1)^{\frac{n}{n-1}} [\log(n-1) \Gamma(n/(n-1)) + \Gamma'(n/(n-1))]}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}} \Gamma(1/(n-1))} \\ &= \log(n-1) + (n-1) + \frac{\Gamma'(1/(n-1))}{\Gamma(1/(n-1))} \equiv \gamma(n). \end{aligned}$$

#

Nota 2.4.3 La función $\gamma(n)$ es positiva y creciente para $n > 1$. La función $n(\log n - \gamma(1/n))$ es negativa para $0 < n < 1$, con ceros en los puntos $n = 0$ y $n = 1$. Además, cuando $n \rightarrow 1$,

$$\frac{\partial c_*}{\partial \sigma}(0, n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1) + o(n-1) & \text{si } n > 1 \\ -\frac{3}{2}(1-n) + o(1-n) & \text{si } n < 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Finalizamos esta sección observando el comportamiento de c_* en $\sigma = 0$ en la otra dirección: $c_*(0, n) = 1$, si $n > 1$ y $c_*(0, n) = n$, si $0 < n < 1$.

2.5 Caso $k < 0$

Probaremos en esta sección el teorema 2.1.2. Comenzaremos con la caracterización de las soluciones de las ecuaciones (2.4, 3.4).

Lema 2.5.1 Las ecuaciones (2.4) y (3.4) con $k_0 < 0$ poseen trayectorias admisibles si y sólo si $m + p > 0$.

Demostración:

$n > 1, |\sigma| \leq 1$. Como en la sección 2.2 tenemos seis puntos críticos Λ_1 — Λ_6 en Θ , los cuales son:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= (1, 0), \quad \Lambda_2 = \left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \frac{\epsilon}{\sqrt{1+n^2}} \right), \quad \Lambda_{3,4} = (0, \pm 1), \\ \Lambda_5 &= \left(0, \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \right), \quad \Lambda_6 = (0, 0), \end{aligned} \quad (5.1)$$

en el caso $-1 < \sigma < 1$. Si $\sigma = -1$ reemplazamos $\Lambda_{5,6}$ por $\Lambda_{51,61} = (0, \frac{z_i}{\sqrt{1+z_i^2}})$, donde $z_i = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2+4})$, mientras que para $\sigma = 1$ reemplazamos $\Lambda_{1,2}$ por $\Lambda_{11,21} = (\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_i^2}}, \frac{\zeta_i}{\sqrt{1+\zeta_i^2}})$, donde $\zeta_i = \frac{1}{2n}(\epsilon \pm \sqrt{1-4k_0n})$.

El análisis de estos puntos es muy similar al del caso $k_0 > 0$. Sus comportamientos son los siguientes: Λ_1 y Λ_2 son nodos y su estabilidad depende del signo de c y ϵ , Λ_5

y Λ_6 son puntos silla. Para probar este resultado sólo hay que hacer el análisis que se hizo en el sistema (5.2) en el sistema

$$\begin{cases} \frac{dW}{d\zeta} = -(n-1)W \\ \frac{dV}{d\zeta} = \varepsilon V + cVW - nV^2 + W^{1-\sigma}, \end{cases} \quad (5.2)$$

y el análisis que se hizo en el sistema (2.3), con $k_0 > 0$, repetirlo para $k_0 < 0$. Λ_3 y Λ_4 se comportan como en el caso $k_0 > 0$, ambos son nodos, Λ_3 estable y Λ_4 inestable. Puede verse fácilmente que las únicas trayectorias admisibles son las conexiones desde uno de los nodos inestables Λ_1 ó Λ_2 y uno de los puntos silla Λ_5 ó Λ_6 por medio de la variedad estable del punto silla.

Si $\epsilon = +1$ y $c > 0$ tenemos que Λ_1 es estable y Λ_2 es inestable; la variedad central para Λ_6 es estable para $U > 0$ ($X > 0$), la variedad central Λ_5 es inestable. La trayectoria deseada es la conexión $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_5$.

Observemos ahora que el cambio de signo de ϵ cambia los papeles entre Λ_1 y Λ_2 y lo mismo ocurre con Λ_5 y Λ_6 cuando cambiamos el signo de c . Por tanto, tenemos la conexión $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_6$, para $\epsilon = +1$ y $c < 0$; para $\epsilon = -1$ y $c > 0$ la conexión $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_5$ y finalmente, para $\epsilon = -1$ y $c < 0$ la conexión $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_6$.

Si $\sigma = -1$ las conexiones son: $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_{51}$ cuando $\epsilon = +1$ y $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_{51}$ si $\epsilon = -1$. Para $\sigma = 1$ tenemos las conexiones $\Lambda_{11} \rightarrow \Lambda_5$ en el caso $c > 0$ y $\Lambda_{11} \rightarrow \Lambda_6$ cuando $c < 0$.

El caso $c = 0$ se estudia al final de la demostración.

$n > 1, \sigma > 1$. En este caso, los puntos del infinito $\Lambda_{1,2}$ desaparecen, y los puntos $\Lambda_{3,4}$ son puntos críticos que tienen cero como valor propio doble. El cambio de variables $Z = X^{\frac{1+\sigma}{2}}$ transforma la ecuación de los puntos en el ecuador de la esfera de Poincaré correspondiente (ver (2.10)) en la ecuación

$$U(U^2 - \mu V^2) = 0, \quad (5.3)$$

donde $\mu = 1 + \frac{(n-1)(\sigma+1)}{2} > 0$. Así pues, este cambio descompone los dos puntos $\Lambda_{3,4}$ en Θ en los cuatro puntos

$$\Lambda_{31,41} = (0, \pm 1), \quad \Lambda_{32,42} = \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{1+\mu}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\mu}} \right), \quad (5.4)$$

y deja invariantes los puntos críticos finitos $\Lambda_{5,6}$. Además, tenemos que Λ_{31} y Λ_{41} se comportan como Λ_3 y Λ_4 respectivamente, mientras que Λ_{32} y Λ_{42} juegan el papel de Λ_1 ó Λ_2 , dependiendo del signo de ϵ . Obtenemos entonces que el dibujo en Θ es el mismo que antes, con las conexiones $\Lambda_{32} \rightarrow \Lambda_5$ ó $\Lambda_{32} \rightarrow \Lambda_6$.

$n > 1, \sigma < -1$.

Aquí los puntos que desaparecen son los puntos críticos finitos $\Lambda_{5,6}$. Si consideramos el cambio de variables $Z = X^{\frac{1-\sigma}{2}}$, $H = YX^{-\frac{1+\sigma}{2}}$, entonces la ecuación diferencial de las trayectorias es

$$\frac{1}{2}(n-1)(1-\sigma)ZH \frac{dH}{dZ} = 1 + \epsilon ZH + cZ^{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}H - \mu H^2, \quad (5.5)$$

con el mismo valor de μ que antes. Existirán puntos críticos finitos si y sólo si $\mu > 0$, o lo que es lo mismo, $m+p > 0$. Si proyectamos la esfera de Poincaré sobre $W = 0$, tenemos los puntos críticos finitos

$$\Lambda_{33,43} = \left(0, \frac{\pm \sqrt{\mu}}{\sqrt{1+\mu}} \right), \quad (5.6)$$

que juegan el papel de Λ_5 ó Λ_6 y, también, los puntos Λ_1 — Λ_4 . Las trayectorias buscadas son las conexiones $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_{33}$ ó $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_{33}$. Observemos que el comportamiento en el punto Λ_{33} en el plano XY , es $Y \approx X^{\frac{\sigma+1}{2}}$, y la condición $\mu > 0$, que implica $\frac{\sigma+1}{2} > \frac{-1}{n-1}$, permite a las trayectorias que entran en este punto satisfacer la condición de flujo, (ver (2.2.4)).

$n < 1$. De manera semejante a como procedimos en la sección 2.3, si $c \neq 0$ el caso que estamos considerando se reduce al caso $n > 1$ por un sencillo cambio de variables, la única cuestión a tener en cuenta es que el cambio de signo de c se traduce en un cambio de signo de ϵ y recíprocamente.

Caso $c = 0$. En este caso y cuando $n > 1$, no existen puntos críticos finitos en el plano XY , si $\sigma < -1$, los puntos críticos son $(0, \pm 1)$, si $\sigma = -1$, y finalmente, si $\sigma > -1$, es punto crítico sólo el origen, pero con cero como valor propio doble. Al igual que antes, con la ayuda de algunos cambios de variables, podemos llegar a una configuración similar en Θ con seis puntos críticos. Con el fin de determinar las conexiones admisibles, es importante saber cuáles de los nuevos puntos críticos que aparecen tienen segunda coordenada positiva (esto dependerá de ϵ).

Si $\sigma < 1$ ponemos $Z = X^{\frac{1-\sigma}{2}}$, $H = YX^{-\frac{1+\sigma}{2}}$ y, teniendo en cuenta (5.5), obtenemos los puntos Λ_{33} y Λ_{43} al igual que antes, partiendo de $\Lambda_{3,4}$, si $\sigma < -1$, ó de $\Lambda_5 = \Lambda_6$, si $\sigma > -1$. En el caso $\sigma \geq 1$ hacemos el cambio $Z = X^{\frac{\sigma-1}{2}}$, $H = YX^{-1}$ y, entonces $\Lambda_5 = \Lambda_6$ se transforman en los puntos

$$\Lambda_{34,44} = (0, \frac{\eta_i}{\sqrt{1 + \eta_i^2}}) \quad (5.7)$$

con $\eta_i = \frac{\epsilon \pm \sqrt{1-4k_0n}}{2n} > 0$, si $\sigma = 1$, y

$$\Lambda_{35} = (0, 0), \quad \Lambda_{45} = (0, \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + n^2}}), \quad (5.8)$$

si $\sigma > 1$, todos ellos con las mismas propiedades que Λ_5 ó Λ_6 .

Como para $c = 0$ y $n < 1$ no podemos utilizar el cambio de variables (3.5, 3.6), estudiamos directamente la ecuación (3.4). La única cuestión diferente es el comportamiento de las trayectorias en el infinito, que se refleja en la condición de acotación.

Esto completa la descripción de las diferentes conexiones en Θ . En la figura 5.1 mostramos, a modo de ejemplo, el caso $-1 < \sigma < 1$, $\epsilon = +1$ y $c > 0$, que da lugar a la conexión $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_5$. Los casos restantes son topológicamente equivalentes. #

Fin de la demostración del teorema 2.1.2: Completaremos la demostración comprobando las condiciones de acotación (2.6, 3.8). Recordemos que los signos de c y ϵ son los mismos que los signos de s y b .

En el caso $n > 1$, $\sigma < 1$ y $\epsilon = +1$, el punto del infinito para las trayectorias admisibles es Λ_2 y tenemos el comportamiento asintótico $Y \approx X$. Por tanto (2.6)

Para $n < 1$,

- $c > 0 \implies m \geq 1$ y $m + p < 2$ ó $m \geq p$ y $m + p \geq 2$,
es decir $m \geq \max\{p, 1\}$.
- $c < 0 \implies p \leq 1$ y $m + p < 2$ ó $p \leq m$ y $m + p \geq 2$,
es decir, $p \leq \max\{m, 1\}$.
- $c = 0 \implies m \geq p$ y $m + p \geq 2n$ ó $m \geq n$, $m + p < 2n$ y $\epsilon = +1$ ó $p \leq n$,
 $m + p < 2n$ y $\epsilon = -1$;
es decir, $m \geq \max\{p, n\}$ y $\epsilon = +1$ ó $p \leq \max\{m, n\}$ y $\epsilon = -1$.

#

2.6 Ondas Viajeras Finitas

Una de las propiedades más interesantes, con vistas a las aplicaciones, de las soluciones de la ecuación (1.1), es la propiedad de propagación finita. Estudiaremos entonces cuáles de las ondas viajeras encontradas en las secciones precedentes son finitas, es decir, se anulan para $\xi \geq \xi_0$ para algún valor $\xi_0 < \infty$. La propiedad de propagación finita de las soluciones de una ecuación más general que (1.1) ha sido profundamente estudiada en los artículos [32, 35]. En estos trabajos se consideran solamente ondas viajeras **locales**, donde el carácter local significa o bien una posible no acotación o bien el no satisfacer la condición de flujo en una posible interfase izquierda. A este respecto, también las conexiones desde el punto Λ_4 en las figuras 2.1 y 5.1 deberían ser consideradas.

Analizaremos el comportamiento de las trayectorias $Y = Y(X)$ en los planos de fase de (2.1) y (3.3) cerca de $X = 0$. Las ondas viajeras finitas corresponden a trayectorias que satisfacen la condición

$$\int_{0+} \frac{X^{\frac{m-L}{|m-1|}}}{Y(X)} dX < \infty \quad (6.1)$$

(compárese con las condiciones de acotación (2.6, 3.8)).

2.6.1 Ondas de reacción, $k > 0$

Si $\sigma = -1$ las trayectorias cortan el eje Y en los puntos $(0, A)$, $A > 0$, es decir, la primera aproximación de Y es una constante. La condición (6.1) se convierte en $m > \ell$.

Si $|\sigma| < 1$, tenemos una trayectoria que va al punto $(0, c)$, y un continuo de trayectorias que entran en el origen como X^δ , con $\delta = \sigma + 1$, cuando $n > 1$ y $\delta = 1 - \sigma$ cuando $n < 1$. Por tanto la condición (6.1) implica $m > \ell$ para la primera trayectoria y $p < \ell$ para las demás curvas. Además si $m \leq \ell$ entonces $p \geq \ell$ ($|\sigma| < 1$), lo que implica la no existencia de ondas finitas para este caso. Si $\sigma = 1$ también tenemos, además de las anteriores, un comportamiento lineal en el origen cuando $c = 0$ y $n > 1$. En este caso la condición (6.1) es $m > n$, que se cumple siempre por el teorema (2.1.1).

Resumiendo

Teorema 2.6.1 *Si $k > 0$, existen OV finitas si y sólo si $m > \ell$.*

2.6.2 Ondas de absorción, $k < 0$

La caracterización de las ondas viajeras finitas en este caso es un poco más complicado por el número diferente de situaciones que aparecen dependiendo de los parámetros.

Teorema 2.6.2 *Las ondas viajeras del teorema 2.1.2 con $n > 1$ son finitas si y sólo si se cumple una de las condiciones siguientes:*

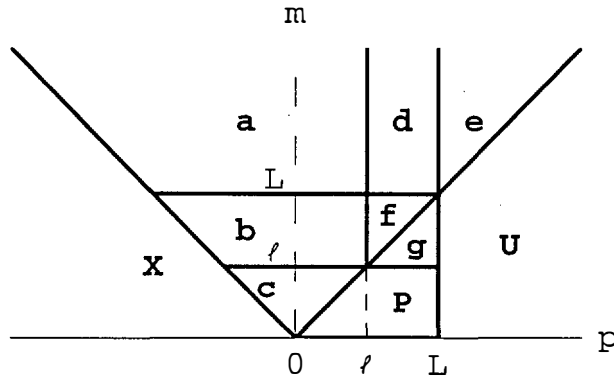


Figura 6.1: El diagrama de ondas viajeras para $k < 0$: las diferentes regiones (a)—(g) donde puede haber ondas finitas; donde todas las ondas son positivas(P); no acotadas (U), o no existen ondas (X).

- a) $p < 1 < n \leq m$.
- b) $p < 1 \leq m \leq n, b \leq 0$.
- c) $p < m \leq 1 < n, b < 0$ ó $b = 0$ y $s \leq 0$.
- d) $1 < p < n \leq m, s \geq 0$.
- e) $1 < n < p \leq m, s > 0$ ó $s = 0$ y $b \geq 0$ (para el caso $b = s = 0$, donde debemos tener que $p < m$).
- f) $1 < p \leq m \leq n, b \leq 0$ y $s \geq 0$ (para el caso $b = s = 0$, donde tenemos $p < m$).
- g) $1 < m < p \leq n, b < 0$ y $s > 0$.

Notemos que cuando $m < p < n$ y $m < 1$ todas las ondas son positivas, independientemente del valor de b ó s . Si $p > \max\{m, n\}$ todas las ondas son no acotadas.

Para más claridad mostramos los diferentes casos en un diagrama (ver figura 6.1).

Demostración: Usaremos (6.1) y el comportamiento de las trayectorias en los puntos finales $\Lambda_5, \Lambda_{51}, \Lambda_6, \Lambda_{33}, \Lambda_{34}, \Lambda_{35}, \Lambda_{44}, \Lambda_{45}$. Tenemos que

- $\sigma \leq -1 \implies Y \approx X^{\frac{\sigma+1}{2}} \implies m > p.$
- $\sigma > -1, c > 0 \implies Y \approx 1 \implies m > 1.$
- $\sigma > -1, c < 0 \implies Y \approx X^{\sigma+1} \implies p < 1.$
- $-1 < \sigma \leq 1, c = 0 \implies Y \approx X^{\frac{\sigma+1}{2}} \implies m > p.$
- $\sigma > 1, c = 0, \epsilon = +1 \implies Y \approx X \implies m > n.$
- $\sigma > 1, c = 0, \epsilon = -1 \implies Y \approx X^\sigma \implies p < n.$

Estas condiciones deben ser comparadas con las condiciones de existencia, para obtener la caracterización anterior.

Teorema 2.6.3 *Las ondas viajeras del teorema 2.1.2 con $n < 1$ son finitas si y sólo si se cumplen las condiciones del teorema 2.6.2, intercambiando los papeles de b y s así como de n y 1 .*

La demostración es la misma y omitiremos los detalles.

2.6.3 La ecuación de la interfase

Como mencionamos en la introducción, el comportamiento cerca de la interfase $x = s(t) = ct$ de las ondas viajeras finitas puede proporcionar información sobre la propagación de las soluciones generales del problema de Cauchy. Esto es así por ejemplo en la ecuación de medios porosos ($b = k = 0, a = \frac{1}{m}$ en (1.1)). Las ondas viajeras en este caso satisfacen la relación

$$-\psi'(0) = c, \quad (6.2)$$

donde $\psi = \frac{\varphi^{m-1}}{m-1}$ es el perfil de la onda en variable presión. De aquí se obtiene mediante comparación la llamada ecuación de la interfase

$$-v_x(s(t), t) = s'(t), \quad (6.3)$$

véase [50].

En la ecuación completa (1.1), aparecen varios comportamientos distintos, dependiendo del término dominante en la ecuación, como ha sido expuesto en casos particulares ([43], [58]).

Expondremos aquí los diferentes comportamientos a que dan lugar las distintas ondas viajeras finitas obtenidas en este capítulo, para $n > 1$, $b \neq 0$ y $k \neq 0$. Consideraremos para ello diferentes potencias de la solución que reflejan la influencia de cada término de la ecuación.

Definimos pues, asociado al perfil φ de la onda, las funciones

$$\psi = \frac{\varphi^{m-1}}{m-1}, \quad \chi = \frac{\varphi^{1-p}}{1-p}. \quad (6.4)$$

Observemos que se tiene $\psi = \chi$ en el caso $m + p = 2$ ($\sigma = -1$).

Ondas de reacción

Proposición 2.6.4

a) Si $|\sigma| < 1$ y $c \geq c^*$ ó $\sigma = 1$, $0 < k_0 \leq \frac{1}{4n}$ y $c > 0$, existe una única OV finita que verifica

$$c = -\psi'(0), \quad (6.5)$$

e infinitas OV que verifican

$$c = \frac{k_0}{-\chi'(0)}. \quad (6.6)$$

b) Si $\sigma = -1$ y $c \geq c^*$, todas las OV finitas satisfacen

$$c = -\psi'(0) + \frac{k_0}{-\psi'(0)}. \quad (6.7)$$

Para las ondas con velocidad $c = 0$, soluciones estacionarias, aún es posible describir su comportamiento cerca de la frontera en términos de la potencia

$$\theta = \frac{\varphi^{m-n}}{m-n}. \quad (6.8)$$

Proposición 2.6.5 Si $\sigma = 1$ y $0 < k_0 \leq \frac{1}{4n}$, todas las soluciones estacionarias satisfacen la ecuación

$$n(\theta'(0))^2 + \theta'(0) + k_0 = 0. \quad (6.9)$$

La demostración de estos resultados es inmediata a partir del comportamiento de las trayectorias en el plano de fases para $X \approx 0$.

De hecho, si la trayectoria termina en un punto $(0, A)$, $A > 0$, el comportamiento del perfil φ para $\xi \sim 0$ es

$$\varphi(\xi) \sim [(m-1)A(-\xi)_+]^{\frac{1}{m-1}} \quad (6.10)$$

Por otro lado, las trayectorias que tienden al origen se comportan como $Y \sim \frac{1}{c}X^{\sigma+1}$ que implica

$$\varphi(\xi) \sim [\frac{1}{c}(1-p)(-\xi)_+]^{\frac{1}{1-p}} \quad (6.11)$$

Finalmente, para $c = 0$ las trayectorias son lineales en el origen, $Y \sim \lambda X$, con λ verificando la ecuación $n\lambda^2 - \lambda + k_0 = 0$. Concluimos observando en (2.1) que se tiene $Y/X = -\theta'$.

Ondas de absorción

En este caso aparecen dos comportamientos más que añadir a los anteriores, que se pueden describir haciendo uso de las potencias

$$\vartheta = \frac{2\varphi^{\frac{m-p}{2}}}{m-p}, \quad \varpi = \frac{\varphi^{n-p}}{n-p}. \quad (6.12)$$

Proposición 2.6.6 *Para cada velocidad $c \neq 0$, la única onda viajera con esa velocidad satisface las siguientes relaciones en la interfase.*

- a) Si $\sigma > -1$ y $c > 0$, se tiene (6.5).
- b) Si $\sigma > -1$ y $c < 0$, se tiene (6.6).
- c) Si $\sigma = -1$ y $c \neq 0$, se tiene (6.7).
- d) Si $\sigma < -1$ y $c \neq 0$, se tiene

$$-\vartheta'(0) = \sqrt{\frac{2}{m+p}}. \quad (6.13)$$

Observamos que en este último caso, $\sigma < -1$, la velocidad no aparece en la primera aproximación del perfil en la interfase. Este hecho ya fue observado en [43] para la ecuación con absorción sin convección, y ha sido analizado posteriormente en [30].

En cuanto a velocidad $c = 0$ se verifica:

Proposición 2.6.7 *La única solución estacionaria verifica:*

- a) Si $\sigma < 1$ se tiene (6.13).
- b) Si $\sigma = 1$ se tiene (6.8) siempre con $\theta'(0) < 0$.
- c) Si $\sigma > 1$ y $\epsilon = 1$ se tiene

$$-\theta'(0) = \frac{1}{n}. \quad (6.14)$$

- d) Si $\sigma > 1$ y $\epsilon = -1$ se tiene

$$-\varpi'(0) = 1. \quad (6.15)$$

2.6.4 Algunas soluciones explícitas

Concluiremos mostrando algunas ondas viajeras explícitas soluciones de la ecuación (1.1). Si $\sigma = 0$ existen dos trayectorias explícitas soluciones de la ecuación (2.4) en el caso $k, b > 0$, que son $Y(X) = 1$, $Y(X) = \frac{1}{n}X$ (ó $Y(X) = X$, $Y(X) = \frac{1}{n}$ en (3.4)), con velocidades $c = 1$ ($s = \frac{ak}{b}$) y $c = n$ ($s = \frac{ank}{b}$) respectivamente. Observemos que la primera trayectoria existe si $kb > 0$. Estas trayectorias producen los perfiles de onda,

$$\phi(z) = \begin{cases} \left[\frac{k(m-1)}{b} (-z)_+ \right]^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } m > 1 \\ e^{-\frac{kz}{b}} & \text{si } m = 1, \end{cases} \quad (6.16)$$

con $z = x - \frac{ak}{b}t$, y

$$\phi(z) = \begin{cases} \left[\frac{b(m-n)}{an} (-z)_+ \right]^{\frac{1}{m-n}} & \text{si } m > n \\ e^{-\frac{bmz}{an^2}} & \text{si } m = n, \end{cases} \quad (6.17)$$

con $z = x - \frac{ank}{b}t$.

Además, en el caso $\sigma = 1$, $s = 0$ y $k \leq \frac{b^2}{4an}$ encontramos las trayectorias $Y = \lambda X$ para (2.23) (ó $Y = \lambda$ para (3.4)), con

$$\lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{1 - 4k_0 n}}{2n}. \quad (6.18)$$

Por tanto obtenemos dos trayectorias si $0 < k_0 < \frac{1}{4n}$, y solamente una si $k_0 = \frac{1}{4n}$ ó $k_0 < 0$, representada en este último caso por el signo más en λ . Esto nos lleva a las soluciones estacionarias

$$u(x) = \begin{cases} [\mu(m-n)(-x)_+]^{\frac{1}{m-n}} & \text{si } m > n \\ e^{-\mu x} & \text{si } m = n, \end{cases} \quad (6.19)$$

donde $\mu = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4akn}}{2an}$.

Los casos $n = 1$, $b = 0$ ó $k = 0$ son bien conocidos. Por ejemplo, si $b = 0$ tenemos ondas explícitas para $m + p = 2$ (ver [43, 58]):

$$\phi(z) = \begin{cases} [\rho(m-1)(-z)_+]^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } m > 1 \\ e^{-\rho z} & \text{si } m = 1, \end{cases} \quad (6.20)$$

con $\rho = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4ak}}{2a}$, $z = x - st$ y $s \geq s_* = 2\sqrt{ak}$, si $k > 0$ ó $s \in \mathbb{R}$, si $k < 0$. En el caso $n = 1$ tenemos las mismas ondas con la velocidad s reemplazada por $s + b$.

Por último, cuando $k = 0$ las ecuaciones (2.4, 3.4) son solubles explícitamente, dando lugar a las ondas:

$$\frac{|n-1|}{an}(-z)_+ = \begin{cases} \int_0^{\phi^{n-1}(z)} \frac{\eta^{\frac{m-n}{n-1}}}{ns + b\eta} d\eta & \text{si } m \geq n > 1 \\ \int_0^{\phi^{1-n}(z)} \frac{\eta^{\frac{m-1}{1-n}}}{b + ns\eta} d\eta & \text{si } m \geq 1 > n, \end{cases} \quad (6.21)$$

con $z = x - st$, $s > 0$, $b > 0$. Esta expresión también tiene sentido sin la restricción sobre m cuando $b < 0$, $s > 0$ y $n > 1$ ó $b > 0$, $s < 0$ y $n < 1$.

Capítulo 3

Soluciones autosemejantes para una ecuación de reacción-difusión-convección

3.1 Introducción

En este capítulo estudiamos la ecuación parabólica no lineal

$$u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u^{n-1}u_x + ku^p \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1)$$

con $m, n > 1$, $0 < p < 1$ y $k > 0$. Estudiaremos una clase particular de soluciones de la ecuación (1.1), las llamadas **soluciones autosemejantes**, es decir, aquellas soluciones de la forma

$$u(x, t) = t^\alpha \varphi(\xi), \quad \xi = xt^{-\beta}, \quad (1.2)$$

donde φ es algún perfil no negativo. Observemos que la homogeneidad de los términos en la ecuación implica la relación

$$m + p = 2n, \quad (1.3)$$

y los exponentes α y β están determinados de forma única (ver (2.10)).

Estamos particularmente interesados en estudiar la ecuación de la interfase que verifican las soluciones autosemejantes de soporte compacto. Como hemos visto en el capítulo anterior, no hay una relación clara que deban satisfacer las soluciones en la interfase, pues para una misma elección de los parámetros hemos encontrado diferentes comportamientos.

Consideremos pues una solución de (1.1), y sea $s(t)$ su interfase derecha, es decir

$$s(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x, t) > 0\},$$

que supondremos finita. La presencia del término de reacción fuerte $f(u) = ku^p$, $0 < p < 1$, da lugar a que el problema de Cauchy asociado a la ecuación (1.1) no tenga unicidad. Así pues, la existencia de esta interfase para un dato inicial de soporte acotado por la derecha sólo está garantizada en el caso de considerar soluciones minimales y $n \geq 1$, ver [35, 58]. Queremos estudiar la relación entre la velocidad de propagación de la solución, $s'(t)$, con la forma de la solución cerca del frente $x = s(t)$. Ésta es la ecuación de la interfase. Como ya hemos mencionado anteriormente, la ecuación de la interfase para la ecuación de los medios porosos es

$$s'(t) = -v_x(s(t), t), \quad v = \frac{u^{m-1}}{m-1}, \quad (1.4)$$

siempre con $m > 1$, y donde la derivada espacial se entiende como límite desde el conjunto de positividad.

En términos de v , la ecuación de los medios porosos es

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + (v_x)^2, \quad (1.5)$$

y la derivación formal de (1.4) puede obtenerse directamente, diferenciando la identidad $v(s(t), t) = 0$ cuando $v_x \neq 0$ y usando que cerca de la interfase $x = s(t)$, el término vv_{xx} es pequeño. Además (1.4) es cierto también cuando $v_x = 0$. Para nuestra ecuación (1.1), la correspondiente ecuación de la presión es

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + (v_x)^2 + [(m-1)v]^r v_x + k[(m-1)v]^{2r}. \quad (1.6)$$

donde $r = \frac{n-1}{m-1}$.

Por tanto, ni el término de convección ni el de reacción deben afectar los cálculos formales anteriores cuando $n > 1$. Puede probarse que esto ocurre si $p \geq 1$, y la ecuación de la interfase es nuevamente (1.4).

No obstante, si $p < 1$, la falta de unicidad del problema de Cauchy provoca que algunas soluciones verifiquen (1.4) y otras no. La dificultad aquí radica en que se puede tener $v_x = 0$ pero $s'(t) > 0$.

Las ondas viajeras obtenidas en el capítulo anterior muestran la existencia de un comportamiento lineal en otra potencia de la solución, dando lugar a la ecuación

$$s'(t) = \frac{k}{-w_x(s(t), t)}, \quad w = \frac{u^{1-p}}{1-p}. \quad (1.7)$$

reflejando el carácter dominante del término de reacción ($1 - p < m - 1$). Véase también [43]. De las ondas viajeras antes mencionadas, sólo una satisface (1.4), todas las demás verifican (1.7). Por otro lado, en [58] se prueba que (1.4) es la ecuación de la interfase satisfecha por las soluciones minimales en la ecuación sin convección y $m + p > 2$ (véase también el primer capítulo de esta memoria). Todo esto nos lleva a considerar (1.4) como la ecuación correcta de la interfase, no (1.7).

En el caso $n = 1$ ($m + p = 2$), los tres términos en la ecuación (1.1), la difusión, la convección y la reacción, son del mismo orden, y la ecuación esperada de la interfase es (aquí $v = w$),

$$s'(t) = -v_x(s(t), t) + \frac{k}{-v_x(s(t), t)} + 1. \quad (1.8)$$

Esta relación da lugar a dos ramas en el plano (λ, c) , donde $\lambda = -v_x(s(t), t)$ es la pendiente de la solución en la interfase y $c = s'(t)$ es la velocidad de avance de la misma. Refiriéndonos de nuevo a [58], vemos que las soluciones minimales del problema allí considerado satisfacen (1.8), siempre con

$$|v_x(s(t), t)| \geq \sqrt{k}. \quad (1.9)$$

(ver también (1.3.5)). Es por ello que se considera la rama buena

$$c = \lambda + \frac{k}{\lambda}, \quad \lambda \geq \sqrt{k}.$$

Más aún, la solución autosemejante explícita construida en ese trabajo, que se prueba que no es solución minimal, verifica (1.8) pero no (1.9). Decimos entonces que la ecuación correcta de la interfase para las soluciones de la ecuación (1.1) es (1.8,1.9).

Finalmente, si $0 < n < 1$ ($m + p < 2$), puede aparecer un tercer comportamiento en la interfase. Recordemos que en este caso la propiedad de propagación finita sólo se cumple si $k \leq 1/4n$, ver [35]. Esto incluye la ecuación con absorción $k < 0$, [43]. En la ecuación con reacción es determinante la presencia de la convección, pues sin ella, pero con $m + p < 2$, todas las soluciones son positivas, [58].

Las ondas viajeras obtenidas en el capítulo anterior para el caso $m + p = 2n < 2$ muestran un comportamiento de la solución en la interfase lineal en la potencia $u^{\frac{m-p}{2}}$, pero la velocidad no aparece en el primer término del desarrollo de la solución cerca de la interfase, (6.13). De hecho, la estructura local de la solución está gobernada por un operador diferencial de segundo orden, [30]. En cualquier caso, aquí probamos que no existen soluciones autosemejantes con soporte compacto siempre que $0 < n < 1$.

El propósito de este capítulo es caracterizar la existencia de soluciones autosemejantes de soporte compacto para la ecuación (1.1), verificando la ecuación de la interfase (1.4) si $n > 1$ y (1.8,1.9) si $n = 1$.

3.2 Descripción de los resultados

Si buscamos soluciones autosemejantes no negativas en la forma (1.2) para la ecuación (1.1), encontramos que necesariamente $m + p = 2n$ y los exponentes son

$$\alpha = \frac{1}{1-p}, \quad \beta = \frac{m-p}{2(1-p)}. \quad (2.10)$$

Cuando $n > 1$, esto implica además las relaciones $0 < p < 1 < n < 2n - 1 < m < 2n$, $\alpha > 1$ y $\beta > 1$. En particular tenemos que las soluciones parten del valor inicial cero,

un efecto de la reacción fuerte. El perfil φ es una función no negativa, continua en \mathbb{R} , tal que también es continua la función $\varphi^{m-1}\varphi'$, y satisface la ecuación

$$\alpha\varphi - \beta\xi\varphi' = (\varphi^{m-1}\varphi')' + \varphi^{n-1}\varphi' + k\varphi^p. \quad (2.11)$$

Estamos interesados en soluciones que tengan soporte compacto $[\xi_0, \xi_1]$, con $\xi_0 < 0$ y $\xi_1 > 0$. Por tanto, como $\beta > 0$ el soporte de $u(\cdot, t)$ se dilata con el tiempo. También debemos tener $\varphi^{m-1}\varphi'(\xi_0) = \varphi^{m-1}\varphi'(\xi_1) = 0$. Esta es la llamada **condición de flujo**, (CF). De estas soluciones distinguiremos aquéllas que satisfacen la ecuación de la interfase (1.4), que en términos del perfil φ es

$$-\frac{(\varphi^{m-1})'(\xi)}{m-1} = \beta\xi, \quad (2.12)$$

en $\xi = \xi_0$ y $\xi = \xi_1$. Nos referiremos a ella como (EI). También el comportamiento de la interfase (1.7) se caracteriza aquí por la ecuación (EI*),

$$-\frac{(\varphi^{1-p})'(\xi)}{1-p} = \frac{k}{\beta\xi}. \quad (2.13)$$

Señalemos que debido a la presencia de la convección no hay simetría, y las soluciones autosemejantes podrían satisfacer (EI) en una de las interfases y (EI*) en la otra. De hecho estas ecuaciones reflejan los únicos comportamientos posibles en la interfase (ver más adelante).

Resumiremos aquí los resultados obtenidos en este capítulo:

Teorema 3.2.1 *No existen soluciones autosemejantes con soporte arbitrariamente pequeño. Además el máximo de los perfiles de todas las soluciones autosemejantes está acotado inferiormente por una constante positiva*

En particular, cualquier perfil con soporte compacto pequeño no satisface la condición (CF) en alguna de las interfases. En el caso sin convección este fenómeno se explica a partir de la existencia de la solución minimal absoluta, [59].

Teorema 3.2.2 *No existen soluciones autosemejantes acotadas con soporte arbitrariamente grande que satisfagan (EI) en ninguna de las interfases.*

Por ejemplo, si el perfil satisface (EI) en la interfase izquierda, y ésta se encuentra a la izquierda de cierta constante, entonces el soporte no está acotado por la derecha y la solución crece por la derecha sin límite.

Teorema 3.2.3 *Si $0 < k \leq 1/(4n)$, no existen soluciones autosemejantes que satisfagan (EI) en una interfase derecha no estacionaria.*

Cualquier coeficiente en la ecuación (1.1) puede ser eliminado mediante un cambio de escala, excepto en el caso $m + p = 2n$, que es precisamente nuestro caso. Recordemos que en el capítulo anterior el número $k = 1/(4n)$ aparece también como crítico para la existencia de ondas viajeras. Más aún, el dominio de existencia de tales soluciones es exactamente el dominio anterior de no existencia $0 < k \leq 1/(4n)$. Por otra parte, si admitimos que la interfase derecha sea estacionaria, $\xi_1 = 0$, entonces existen soluciones autosemejantes (incluso explícitas) que satisfacen (EI), ver la última sección del capítulo 2 y el final de la sección 3.4 de este capítulo.

Teorema 3.2.4 *Existen infinitas soluciones autosemejantes que satisfacen (EI) en una de las interfase y (EI*) en la otra interfase.*

El resultado fundamental del capítulo es

Teorema 3.2.5 *Si $k > 1/(4n)$ existe una solución autosemejante con soporte compacto que satisface la ecuación de la interfase (EI).*

La unicidad es aún un problema abierto.

En la sección 3.5 estudiamos los casos $n = 1$ y $0 < n < 1$.

Teorema 3.2.6 *Si $n = 1$ y $k > 0$, existe una única solución autosemejante que satisface la ecuación de la interfase (1.8, 1.9). El soporte del correspondiente perfil es exactamente $[-2\sqrt{k} - 1, 2\sqrt{k} - 1]$.*

Observemos que el soporte de las soluciones crece con el tiempo si y sólo si $k > 1/4$.

Teorema 3.2.7 *Si $0 < n < 1$ no existen soluciones autosemejantes con soporte compacto.*

3.3 El espacio de fases

En esta sección introduciremos un espacio de fases asociado a la ecuación (2.11) y estableceremos algunos resultados preliminares. Recordemos que $n > 1$ y $k > 0$. Así definimos las variables, como en el capítulo anterior,

$$X = \varphi^{n-1}, \quad Y = \varphi^{m-2}\varphi', \quad Z = \xi, \quad \frac{d}{d\eta} = X^{\frac{m-1}{n-1}} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.14)$$

y obtenemos el sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\eta} = (n-1)XY \\ \frac{dY}{d\eta} = -(X+Y+\beta Z)Y + g(X) \\ \frac{dZ}{d\eta} = X^{\frac{m-1}{n-1}}, \end{cases} \quad (3.15)$$

donde $g(s) = \alpha s^{\frac{m-1}{n-1}} - ks^2$. Observemos que la función g es negativa en el intervalo $(0, \Lambda)$ y positiva en (Λ, ∞) , donde $\Lambda = (k(1-p))^{\frac{n-1}{1-p}} = c_*^{n-1}$. La recta $\{X = \Lambda, Y = 0\}$, corresponde a la solución plana $u(x, t) = U(t) = c_* t^\alpha$. Por otra parte, la ecuación de la interfase (2.12) se corresponde con

$$\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} Y(\eta) + \beta Z(\eta) = 0. \quad (3.16)$$



Buscamos en trayectorias $\Gamma(\eta) = (X(\eta), Y(\eta), Z(\eta))$ definidas para cada $\eta \in \mathbb{R}$, con $\Gamma(\eta)$ en el semiespacio $\Theta = \{X \geq 0\}$ para cada η , que son soluciones del sistema (3.15), y que conectan dos puntos finitos $(0, Y_0, Z_0)$, $(0, Y_1, Z_1)$, para $|\eta| \rightarrow \infty$, donde $Y_1 \leq 0 \leq Y_0$. Su correspondiente perfil estará definido en el intervalo $[Z_0, Z_1]$. Veremos que necesariamente $Z_0 < 0 < Z_1$, (menos para el caso donde puede ser $Z_1 = 0$), por lo tanto el soporte no se contrae. Si Z_0 ó Z_1 son finitos, la solución tiene que satisfacer la condición de flujo (FC), que en las nuevas variables es

$$\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} X^{\frac{1}{n-1}}(\eta)Y(\eta) = 0. \quad (3.17)$$

En particular esto implica $|Y_0|, |Y_1| < \infty$, pues las trayectorias con $\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} |Y(\eta)| = \infty$ satisfacen $|Y| \approx X^{\frac{-1}{n-1}}$ para $X \rightarrow 0$, y no pueden satisfacer (3.17). Esto se justifica calculando $\frac{dY}{dX}$ para valores de X pequeños, $|Y|$ grandes y $|Z|$ acotado, obteniendo

$$(n-1)X \frac{dY}{dX} = -Y + O(1).$$

Primeramente probaremos un resultado que muestra que las trayectorias, en cierto sentido, están ordenadas, y que será aplicado más tarde en algunos resultados de unicidad.

Proposición 3.3.1 *Sean Γ_1 y Γ_2 dos trayectorias que pasan, respectivamente, por los puntos (X_1, Y_1, Z_1) y (X_2, Y_2, Z_2) , con $X_1 = X_2$, $Y_1 < Y_2$, $Z_1 > Z_2$ e $Y_1 Y_2 > 0$. Entonces las proyecciones Ξ_1 y Ξ_2 de Γ_1 y Γ_2 sobre el plano $Z = 0$ no se pueden cortar en ningún punto $X > X_1$ antes de alcanzar la recta $Y = 0$.*

Demostración:

Escribiremos las proyecciones Ξ_1 y Ξ_2 como funciones de X , $\Xi_1 = Y_1(X)$, $\Xi_2 = Y_2(X)$. Sea $X_0 > X_1$ el primer punto de intersección de tales curvas. Se tiene $Y_1(X_0) = Y_2(X_0) = Y_0$, $\frac{dY_1}{dX}(X_0) > \frac{dY_2}{dX}(X_0)$. Haciendo uso de (3.15) podemos escribir

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-(X + Y + \beta Z)Y + g(X)}{(n-1)XY},$$

y tenemos que los puntos correspondientes sobre Γ_1 y Γ_2 , es decir, (X_0, Y_0, Z_{01}) y (X_0, Y_0, Z_{02}) , satisfacen $Z_{01} < Z_{02}$. Por tanto, existe $X_1 < X_* < X_0$ tal que los puntos sobre Γ_1 y Γ_2 , (X_*, Y_{*1}, Z_{*1}) y (X_*, Y_{*2}, Z_{*2}) , satisfacen $Z_{*1} = Z_{*2}$ y $\frac{dZ}{dX}(X_*, Y_{*1}) > \frac{dZ}{dX}(X_*, Y_{*2})$. Finalmente, utilizando nuevamente (3.15), resulta $Y_{*1} > Y_{*2}$, que contradice que (X_0, Y_0) es el primer punto de intersección. #

Un análisis del signo de Y' en el plano $Y = 0$ (es decir, el signo de g), permite concluir fácilmente que las trayectorias admisibles deben satisfacer $0 \leq X \leq \Lambda$, lo que significa que la solución plana $U(t)$ es una cota superior absoluta para toda solución autosemejante acotada.

Lema 3.3.2 *Toda trayectoria que pasa por algún punto (X, Y, Z) , con $X > \Lambda$, satisface*

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} X(\eta) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} X(\eta) = \infty. \quad (3.18)$$

Este resultado puede obtenerse también de la ecuación del perfil (2.11), observando que no existen máximos de φ por encima del valor $\varphi = c_*$. Por la misma razón, φ no puede tener un mínimo positivo por debajo de c_* . De esta forma, si φ es acotada, entonces es monótona, o primero crece y después decrece. Además, si el soporte no es acotado, por ejemplo por la derecha, entonces φ es monótona creciente, creciendo sin límite o hasta el valor crítico c_* .

Lema 3.3.3 *Si $X(\eta)$ está acotada para $\eta > \eta_0$, entonces existe el límite $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma(\eta) = (X_\infty, Y_\infty, Z_\infty)$, con $0 < Z_\infty < \infty$ si $X_\infty = 0$, $X_\infty = \Lambda$ si $Z_\infty = \infty$.*

Demostración

Si $\lim_{\eta \rightarrow \infty} Y(\eta)$ no existe, es decir $\frac{dY}{d\eta}$ oscila para $\eta \rightarrow \infty$, consideramos el conjunto T donde $\frac{dY}{d\eta}$ se anula, que consiste en las dos superficies

$$T = \{ Y = T_\pm(X, Z) = \frac{-(X + \beta Z) \pm \sqrt{(X + \beta Z)^2 + 4g(X)}}{2} \}.$$

Las derivadas parciales de T_{\pm} tienen signos constantes para valores pequeños de X y grandes de Z , que nos lleva a una contradicción. Por tanto existe $Y_{\infty} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y(\eta)$. Los límites de la primera y segunda coordenada existen por monotonía.

Supongamos ahora $Z_{\infty} = \infty$. De esta forma tenemos $Y_{\infty} = 0$. También, por (3.15) llegamos a

$$-\beta Y Z = kX^2 + o(X^2),$$

que implica

$$Z \frac{dX}{dZ} = -\frac{k(n-1)}{\beta} X^{\frac{3n-m-2}{n-1}} + o(X^{\frac{3n-m-2}{n-1}}).$$

De aquí se obtiene que X no puede tender a cero cuando Z tiende a infinito. Por lo tanto se tiene el límite $X_{\infty} = a$, con $0 < a \leq \Lambda$. Veamos que necesariamente $a = \Lambda$. La prueba es inmediata si el perfil es creciente, puesto que

$$\frac{dY}{d\eta} = -(X + Y + \beta Z)Y + g(X) < g(a) < 0$$

si $a < \Lambda$, lo cual es imposible. En general, asumiendo $a < \Lambda$ tenemos,

$$0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{Y(\eta)}{Z(\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} [-(X(s) + Y(s) + \beta Z(s))Y(s) + g(X(s))] ds.$$

Afirmamos que todos los sumandos menos el último son cero. Usando la primera ecuación de (3.15), obtenemos

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} X(s)Y(s) ds = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{X(\eta) - X(\eta_0)}{(n-1)Z(\eta)} = 0.$$

El termino que contiene a Y^2 tiene que anularse si la integral converge, y si diverge podemos aplicar la regla de L'Hôpital, obteniendo

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} Y^2(s) ds = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{Y^2(\eta)}{X^{\frac{m-1}{n-1}}(\eta)} = 0.$$

Utilizando ahora la primera y la tercera ecuación de (3.15), integrando por partes y aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} Y(s)Z(s) ds = \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)Z(\eta)} [Z(\eta) \log X(\eta) - Z(\eta_0) \log X(\eta_0) - \int_{\eta_0}^{\eta} X^{\frac{m-1}{n-1}}(s) \log X(s) ds] = 0. \end{aligned}$$

Finalmente concluimos

$$0 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta} g(X(s)) ds = a^{\frac{1-m}{n-1}} g(a),$$

que es imposible si $0 < a < \Lambda$.

#

El conjunto de los puntos críticos del sistema (3.15) en Θ consiste de las dos rectas

$$\begin{aligned} L_0 &= \{X = Y = 0, Z \neq 0\} \\ L_1 &= \{X = 0, Y + \beta Z = 0, Z \neq 0\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Las trayectorias admisibles son aquéllas que tienen sus puntos extremos sobre estas rectas, L_1 corresponde a las trayectorias que satisfacen la ecuación (EI), L_0 corresponde a las trayectorias que satisfacen la condición (CF) pero no la ecuación (EI). Notamos, además, que L_0 implica la ecuación **mala** de la interfase (EI*), ya que es fácil ver que las trayectorias que se acercan a L_0 satisfacen

$$kX^2 \approx \beta YZ. \tag{3.20}$$

En el lema anterior obtuvimos que si $\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} X(\eta) = 0$, entonces $|Z(\eta)|$ está acotado y que $\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} Y(\eta)$ existe, finito o infinito. Esto implica que sólo pueden existir tres posibilidades en el comportamiento final de cualquier trayectoria que se aproxime a $X = 0$:

- la trayectoria finaliza en L_0 ,
- la trayectoria finaliza en L_1 , ó
- $\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} |Y(\eta)| = \infty$.

En particular se deduce que las interfases que cumplen (CF) sólo pueden cumplir (EI) o (EI*).

Con el objetivo de construir soluciones que satisfagan la ecuación (EI), disparamos desde puntos de la forma $P_\gamma = (0, \gamma, -\gamma/\beta) \in L_1$. Linealizando el sistema (3.15)

alrededor del punto P_γ obtenemos la matriz

$$A = \gamma \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios $\lambda_1 = \gamma(n-1)$, $\lambda_2 = -\gamma$, $\lambda_3 = 0$ y vectores propios $e_1 = (n, -1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, \beta, 1)$. Por tanto, existe una única trayectoria $\Gamma_\gamma = \Gamma(\eta, \gamma)$ que satisface

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \Gamma(\eta, \gamma) &= P_\gamma & \text{si } \gamma > 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma(\eta, \gamma) &= P_\gamma & \text{si } \gamma < 0, \end{aligned}$$

ver por ejemplo [42]. Por otra parte, la trayectoria se aproxima a este punto a lo largo del vector propio e_1 , y el comportamiento cerca de P_γ puede ser descrito, como función de X , mediante

$$\begin{aligned} Y &= \gamma - \frac{1}{n}X - \frac{k}{(2n-1)\gamma}X^2 + o(X^2) \\ Z &= -\frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{(m-1)\gamma}X^{\frac{m-1}{n-1}} + o(X^{\frac{m-1}{n-1}}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ahora estudiaremos la trayectoria Γ_γ dependiendo de γ . En primer lugar es inmediato ver que Γ_γ es continua con respecto a γ . Queremos caracterizar, en términos de γ , cuándo esta trayectoria vuelve a L_1 . Seguiremos algunas ideas del trabajo [60], donde también se usa un espacio de fases tridimensional para estudiar la existencia de soluciones autosemejantes especiales para una ecuación de tipo absorción-difusión. Es interesante notar que en nuestro caso la asimetría de la ecuación (1.1) en la variable x hace que sean diferentes los casos $\gamma > 0$ y $\gamma < 0$. Así pues consideramos las dos semirrectas,

$$L_1^+ = \{(0, \gamma, -\gamma/\beta) : \gamma > 0\}, \quad L_1^- = \{(0, \gamma, -\gamma/\beta) : \gamma < 0\}, \tag{3.22}$$

El primer resultado, en sentido negativo, se obtiene de forma sencilla.

Lema 3.3.4 Si $\gamma < 0$ y $0 < k \leq 1/(4n)$, la trayectoria Γ_γ no está acotada, y en particular

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} X(\eta, \gamma) = \infty.$$

Demostración

Primeramente se observa que en el caso $0 < k \leq 1/(4n)$ existen dos trayectorias explícitas que son soluciones al sistema (3.15) y que parten del origen,

$$Q_{1,2} = \{Y = -a_{1,2}X, Z = -b_{1,2}X^{\frac{m-n}{n-1}}, X \geq 0\}, \quad (3.23)$$

con

$$a_{1,2} = \frac{1}{2n}(1 \pm \sqrt{1 - 4kn}) > 0, \quad b_{1,2} = \frac{1}{(m-n)a_{1,2}} > 0.$$

Estas trayectorias corresponden a las soluciones estacionarias

$$\frac{u^{m-n}(x, t)}{m-n} = (-a_{1,2}x)_+ \quad (3.24)$$

(ver [56]). Como una curiosidad observemos que satisfacen a la vez las ecuaciones (EI) y (EI*). Consideremos ahora el conjunto F situado a la izquierda y por encima de la curva Q_1 , esto es,

$$F = \{Y + a_1X < 0, Z + b_1X^{\frac{m-n}{n-1}} > 0\}.$$

La frontera de F consta de dos superficies

$$\begin{aligned} F_1 &= \{Y + a_1X = 0, Z + b_1X^{\frac{m-n}{n-1}} > 0\}, \\ F_2 &= \{Y + a_1X < 0, Z + b_1X^{\frac{m-n}{n-1}} = 0\}, \end{aligned}$$

cuyos vectores normales interiores son

$$\nu_1 = (-a_1, -1, 0), \quad \nu_2 = \left(\frac{m-n}{n-1}b_1X^{\frac{m-n}{n-1}-1}, 0, 1\right).$$

Sea ν el campo vectorial del sistema diferencial (3.15),

$$\nu = ((n-1)XY, -(X+Y+\beta Z)Y + g(X), X^{\frac{m-1}{n-1}}). \quad (3.25)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\nu \cdot \nu_1 &= -X(a_1\beta Z + \alpha X^{\frac{m-n}{n-1}}) < 0, \\ \nu \cdot \nu_2 &= (Y + a_1X)/a_1 < 0.\end{aligned}$$

Por tanto las trayectorias Γ_γ con extremo en $P_\gamma \in L_1^- \subset F$ no pueden salir de F cuando el tiempo se recorre hacia atrás. Finalmente se observa que en F se tiene

$$\frac{dX}{d\eta} < -(n-1)a_1X^2,$$

que implica que X debe ir a infinito (nuevamente cuando el tiempo retrocede). #

Con esto termina la prueba del teorema 3.2.7.

Lema 3.3.5 *Si $|\gamma|$ es suficientemente grande, Γ_γ no está acotada y se cumple (3.18).*

Demostración

Fijemos $\gamma > 0$, los cálculos para $\gamma < 0$ son similares (incluso más fáciles). Definamos en Θ el conjunto

$$E = \{(n-1)Y > \Lambda^{\frac{m-1}{n-1}}, 0 < X < \Lambda, Z < X - \delta\},$$

donde $\delta > 0$ es una constante a determinar.

Nuestro objetivo es probar que las trayectorias que pasan a través de puntos de E deben abandonar este conjunto, cuando η crece, a través de la banda $X = \Lambda$, y teniendo en cuenta el lema 3.3.2, deben escapar a infinito. Finalizamos observando que la trayectoria que parte de P_γ entra en E si γ es grande.

La frontera ∂E de E consta de cuatro superficies

$$\begin{aligned}E_1 &= \{(n-1)Y = \Lambda^{\frac{m-1}{n-1}}\} \cap \partial E, \\ E_2 &= \{Z = X - \delta\} \cap \partial E, \\ E_3 &= \{X = 0\} \cap \partial E, \\ E_4 &= \{X = \Lambda\} \cap \partial E.\end{aligned}$$

Sobre E_1 tenemos

$$(n-1)\frac{dY}{d\eta} > (n-1)M + \beta\Lambda^{\frac{m-n}{n-1}}(\delta - \Lambda) + \frac{\Lambda^{\frac{2(m-n)}{n-1}}}{n-1} - (n-1)\Lambda > 0,$$

eligiendo δ de forma apropiada, y donde $M = \min\{g(X) : 0 < X < \Lambda\}$. Por otra parte, el vector normal interior de E_2 es $\nu_2 = (1, 0, -1)$. Entonces, con ν como en (3.25), tenemos

$$\nu \cdot \nu_2 = X((n-1)Y - X^{\frac{n-n}{n-1}}) > 0.$$

Esto implica que ambas, E_1 y E_2 , son parte del conjunto de entrada del flujo y, como $\frac{dX}{d\eta} > (n-1)\delta X$, la trayectoria abandona E a través de E_4 . #

Esto prueba el teorema 3.2.2. Consideraremos ahora valores pequeños de γ .

Lema 3.3.6 Si $|\gamma| > 0$ es suficientemente pequeño (y $k > 1/(4n)$ si $\gamma < 0$), entonces $X(\eta)$ está acotado y tiende a cero, mientras que $Y(\eta)$ tiende a infinito. Además, se tiene

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \max_{\eta \in \mathbb{R}} X(\eta) = 0. \quad (3.26)$$

Primeramente construiremos una curva especial $Y = H(X)$, que nos permita definir algún subconjunto G de Θ conteniendo a L_1 , al que aplicar argumentos análogos a los anteriores.

Proposición 3.3.7 Para cada $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeño (y $k > 1/(4n)$ si $\varepsilon < 0$), existe una única trayectoria $Y = H(X)$ que es solución de

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-(X+Y-\varepsilon)Y + g(X)}{(n-1)XY}$$

con $Y(0) = \varepsilon$, $Y(B_\varepsilon) = 0$ para algún $0 < B_\varepsilon < \Lambda$. Además $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = 0$.

Demostración

Los puntos críticos del sistema en el plano (X, Y) son $(\Lambda, 0)$ y $(0, \varepsilon)$ ambos puntos de silla. Las trayectorias estable e inestable unen $(\Lambda, 0)$ con $\pm\infty$ cuando $X \rightarrow 0$ (en este análisis juega un papel esencial el signo de $1 - 4kn$ para el caso $\varepsilon < 0$). Por tanto, la única trayectoria que parte de $(0, \varepsilon)$ se encuentra en la región formada por estas dos curvas, lo que implica que debe cruzar el eje $Y = 0$ en algún punto $B_\varepsilon < \Lambda$. El hecho de que B_ε tienda a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se sigue de la continuidad del flujo respecto a los parámetros y del comportamiento de las trayectorias para $\varepsilon = 0$. #



Demostración del lema 3.3.6. Una vez más realizaremos la demostración con detalle sólo para el caso $\gamma > 0$.

Sea $H = H_\varepsilon(X)$ la función obtenida en la Proposición anterior, donde $\varepsilon > 0$ se elegirá con posterioridad. Recordemos que $H_\varepsilon(X) > 0$ para $0 < X < B_\varepsilon$, y $H_\varepsilon(B_\varepsilon) = 0$. Consideremos el conjunto

$$G = \{0 < X < B_\varepsilon, 0 < Y < H, Y + \beta Z + \frac{1}{n}X < 0\}.$$

Está claro, por (3.21), que la trayectoria Γ_γ entra en G si $0 < \gamma < \varepsilon$. Probaremos que Γ_γ no puede salir de G atravesando G_1 ni G_2 , partes de la frontera ∂G de G

$$G_1 = \{0 < X < B_\varepsilon, Y = H, Y + \beta Z + \frac{1}{n}X < 0\},$$

$$G_2 = \{0 < X < B_\varepsilon, 0 < Y < H, Y + \beta Z + \frac{1}{n}X = 0\}.$$

Los vectores normales interiores de G_1 y G_2 son

$$\nu_1 = (H', -1, 0), \quad \nu_2 = \left(-\frac{1}{n}, -1, -\beta\right).$$

Obtenemos entonces

$$\nu \cdot \nu_1 = H(\beta Z - \varepsilon) > 0,$$

en G_1 , ya que $\varepsilon/\beta < Z < 0$, y

$$\nu \cdot \nu_2 = kX^2 - (\alpha + \beta)X^{\frac{n-1}{n-1}} > 0,$$

en G_2 , seleccionando ε suficientemente pequeño para que

$$B_\varepsilon < A = \left(\frac{k}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{n-1}{1-p}}. \quad (3.27)$$

De esta forma Γ_γ sale de G atravesando el plano $\{Y = 0\}$, y esto lo hace antes de llegar al plano $\{Z = 0\}$. Ahora, usando de nuevo (3.21), vemos que Γ_γ no puede aproximarse a L_1^- por debajo del plano $\frac{1}{n}X + Y + \beta Z = 0$, y por tanto se verifica $\lim_{\eta \rightarrow \infty} Y(\eta) = -\infty$. También hemos probado que la coordenada X de Γ_γ permanece acotada por B_ε si ε es suficientemente pequeño y $0 < \gamma < \varepsilon$. Es decir $X(\eta) \leq B_\gamma$ y de aquí se deduce (3.26).

En el caso $\gamma < 0$ consideramos, en lugar de E , el conjunto

$$\tilde{G} = \{0 < X < B_\epsilon, H < Y < 0, Y + \beta Z + \frac{1}{n}X < 0\}.$$

#

Corolario 3.3.8 *i) Existen dos constantes $\xi_- < 0 < \xi_+$ tales que no hay soluciones autosemejantes con soporte $[b, \xi_1]$ ó $[\xi_1, b]$ con $|b| \leq \infty$, $\xi_- < \xi_1 < \xi_+$, $\xi_1 \neq 0$, que satisfaga (EI) en ξ_1 .*

ii) El máximo de los perfiles de cualquier solución autosemejante que satisfaga la (EI) en una de las interfase está acotado por debajo por la constante A de (3.27).

Consideremos ahora trayectorias Υ_μ que parten de los puntos $Q_\mu = (0, 0, \mu) \in L_0$. Asumamos primeramente $\mu < 0$. Si linealizamos alrededor del punto Q_μ , vemos que existe para el flujo una variedad inestable unidimensional y una variedad central bidimensional, ver por ejemplo [21, 20]. La variedad central $Y = h(X, Z)$ satisface $h(0, \mu) = Dh(0, \mu) = 0$, y es solución de la ecuación

$$(n-1)Xh\frac{\partial h}{\partial X} + X^{\frac{n-1}{n}}\frac{\partial h}{\partial Z} + (X + h + \beta Z)h - g(X) = 0.$$

Esto significa que, cerca de $X = 0$, $Z = \mu$,

$$h(X, Z) = -\frac{kX^2}{\beta\mu} + o(X^2),$$

y por consiguiente, haciendo uso de (3.15), cerca de Q_μ tenemos

$$\frac{dX}{d\eta} = -\frac{(n-1)kX^3}{\beta\mu} + o(X^3).$$

Las trayectorias sobre h son inestables y la parte negativa de L_0 se comporta como una fuente. Si $\mu > 0$, un análisis similar muestra que la parte positiva de L_0 es un sumidero. Disparando desde L_0 estudiamos Υ_μ .

Lema 3.3.9 *El lema 3.3.6 se cumple para Υ_μ , con $|\mu|$ suficientemente pequeño.*

Demostración

Está claro que si $|\mu| < |\beta\varepsilon|$, las trayectorias Υ_μ entran en el conjunto G , y tienen que salir atravesando el plano $\{Y = 0\}$. #

Esto demuestra el teorema 3.2.1.

3.4 Demostración de la existencia

Probaremos ahora el teorema 3.2.5. En la primera parte nos concentraremos en las trayectorias que parten de L_1^+ . Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned}
 B^+ &= \{(X, Y, Z) : 0 < X < \Lambda, Y > 0\} \\
 F^+ &= \{(X, Y, Z) : X = \Lambda, Y > 0\} \\
 H &= \{(X, Y, Z) : 0 < X < \Lambda, Y = 0\} \\
 G_F^+ &= \{\gamma > 0 : \Gamma_\gamma \text{ cruza } F^+\} \\
 G_H^+ &= \{\gamma > 0 : \Gamma_\gamma \text{ cruza } H\} \\
 G_\Lambda^+ &= \{\gamma > 0 : \lim_{\eta \rightarrow \infty} X(\eta, \gamma) = \Lambda, \lim_{\eta \rightarrow \infty} Y(\eta, \gamma) = 0, \lim_{\eta \rightarrow \infty} Z(\eta, \gamma) = \infty\}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Lema 3.4.1 *Los conjuntos G_H^+ y G_F^+ son abiertos y conexos y*

$$G_H^+ \cup G_\Lambda^+ \cup G_F^+ = (0, \infty).$$

En particular, esto implica que G_Λ^+ es cerrado y no vacío.

Demostración

Del lema 3.3.6 sabemos que G_H^+ es no vacío y contiene algún intervalo $(0, \gamma)$ y, además, del lema 3.3.5 obtenemos que G_F^+ es no vacío y contiene algún intervalo (γ, ∞) . Ambos son abiertos por continuidad. La propiedad de conexión se sigue de la Proposición 3.3.1. Para finalizar observamos que el lema 3.3.3 nos lleva a que toda trayectoria Γ_γ que sale de B^+ satisface que $\gamma \in G_\Lambda^+$. #

Lema 3.4.2 *El conjunto G_Λ^+ consta de un solo punto, es decir, existe un único perfil que satisface (IE) en la interfase derecha y crece hasta Λ cuando $\xi \rightarrow \infty$.*

Demostración

Supongamos que existen dos trayectorias Γ_{γ_1} y Γ_{γ_2} , con $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, tales que

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_{\gamma_1}(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_{\gamma_2}(\eta) = (0, \Lambda, \infty).$$

Si escribimos las trayectorias como función de $X \in (0, \Lambda)$, es decir ,

$$\Gamma_{\gamma_1} = (X, Y_1(X), Z_1(X)) \quad \text{y} \quad \Gamma_{\gamma_2} = (X, Y_2(X), Z_2(X)),$$

tenemos $Y_1(0) = \gamma_1 < Y_2(0) = \gamma_2$, $\lim_{X \rightarrow \Lambda} Y_1(X) = \lim_{X \rightarrow \Lambda} Y_2(X) = 0$, y también $Z_1(0) = -\gamma_1/\beta > Z_2(0) = -\gamma_2/\beta$. Aplicando la Proposición 3.3.1 tenemos que las curvas Y_1 y Y_2 no se cortan en el intervalo $(0, \Lambda)$, lo cual significa $Y_2(X) > Y_1(X)$. Afirmamos que $Y_2 - Y_1$ no puede disminuir si X tiende a Λ .

Primeramente observamos que de (3.15) tenemos,

$$\frac{dZ_1}{dX} - \frac{dZ_2}{dX} = \frac{X^{\frac{m-1}{n-1}}}{(n-1)Y_1Y_2}(Y_2 - Y_1) > 0,$$

y entonces $Z_1(X) - Z_2(X) > (\gamma_2 - \gamma_1)/\beta > 0$. De nuevo usando (3.15) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{dY_2}{dX} - \frac{dY_1}{dX} &= \frac{-Y_1Y_2[Y_2 - Y_1 + \beta(Z_2 - Z_1)] - g(X)(Y_2 - Y_1)}{(n-1)XY_1Y_2} \\ &> \frac{1}{(n-1)X}[-(Y_2 - Y_1) + (\gamma_2 - \gamma_1)] > 0, \end{aligned}$$

para Y_1, Y_2 pequeños, lo que prueba la afirmación anterior. Esto concluye la demostración. #

Definimos ahora el número

$$\gamma_0^+ = \sup\{\gamma > 0 : (0, \gamma) \subset G_H^+\} > 0. \quad (4.29)$$

Del resultado anterior tenemos que $\gamma_0^+ \in G_A^+$. Por otro lado, para $\gamma \in (0, \gamma_0^+)$ consideremos el tiempo $\eta^+(\gamma)$ para el cual Γ_γ atraviesa H , es decir,

$$\eta^+(\gamma) = \inf\{\eta \in \mathbb{R} : Y(\eta, \gamma) = 0\},$$

y la curva $C^+ : (0, \gamma_0^+) \rightarrow H$ definida por

$$C^+(\gamma) = \Gamma_\gamma \cap H = (X(\gamma, \eta^+(\gamma)), 0, Z(\gamma, \eta^+(\gamma))). \quad (4.30)$$

Haciendo uso del lema 3.4.1 y del resultado (3.26) del lema 3.3.6 obtenemos

Lema 3.4.3 *La curva C^+ es continua en $(0, \gamma_0^+)$ y satisface*

$$\lim_{\gamma \searrow 0} C^+(\gamma) = (0, 0, 0), \quad \lim_{\gamma \nearrow \gamma_0^+} C^+(\gamma) = (\Lambda, 0, \infty). \quad (4.31)$$

Consideremos, ahora los conjuntos (4.28) con índice $-$ correspondiente a $\gamma < 0$. Utilizando el mismo procedimiento obtenemos la curva $C^- : (\gamma_0^-, 0) \rightarrow H$ definida por

$$C^-(\gamma) = \Gamma_\gamma \cap H = (X(\gamma, \eta^-(\gamma)), 0, Z(\gamma, \eta^-(\gamma))), \quad (4.32)$$

donde $\eta^-(\gamma)$ es el instante en que Γ_γ cruza H , y

$$\gamma_0^- = \inf\{\gamma < 0 : (\gamma, 0) \subset G_H^-\} < 0. \quad (4.33)$$

Obsérvese que C^- no existe si $0 < k \leq 1/(4n)$, ya que $G_H^- = \emptyset$ por el lema 3.3.4. Para esta curva se tiene:

Lema 3.4.4 *La curva C^- es continua en $(\gamma_0^-, 0)$ y satisface*

$$\lim_{\gamma \nearrow 0} C^-(\gamma) = (0, 0, 0), \quad \lim_{\gamma \searrow \gamma_0^-} C^-(\gamma) = (\Lambda, 0, -\infty). \quad (4.34)$$

Con estos resultados concluimos

Lema 3.4.5 *Las curvas C^+ y C^- se cortan en algún punto*

$$(X(\gamma_*^+, \eta^+(\gamma_*^+)), 0, Z(\gamma_*^+, \eta^+(\gamma_*^+)) = (X(\gamma_*^-, \eta^-(\gamma_*^-)), 0, Z(\gamma_*^-, \eta^-(\gamma_*^-)) \in H,$$

para ciertos $\gamma_*^+ \in (0, \gamma_0^+)$, $\gamma_*^- \in (\gamma_0^-, 0)$.

Demostración

Para γ suficientemente pequeño, las curvas C^+ y C^- están por debajo y por encima, respectivamente, de la recta $\{X + n\beta Z = 0, \quad Y = 0\}$. Por tanto, como función de X en H , tenemos $C^+ < C^-$ para X pequeño y $C^+ > C^-$ para X cercano a Λ . #

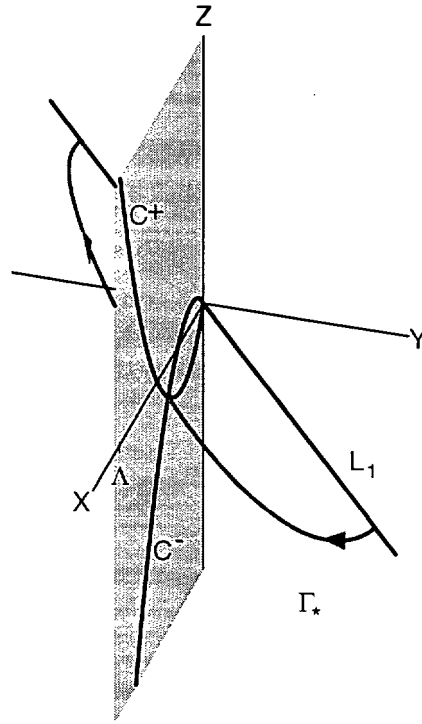


Figura 4.1: La trayectoria Γ_* correspondiente al perfil que satisface (EI).

La demostración del teorema 3.2.5 se concluye ahora fácilmente ya que el lema anterior implica $\gamma_*^+ \in S^+$, $\gamma_*^- \in S^-$. Mediante traslación en η podemos suponer $\eta^+(\gamma_*^+) = \eta^-(\gamma_*^-) = \eta_*$. Entonces la trayectoria deseada es

$$\Gamma_*(\eta) = \begin{cases} \Gamma_{\gamma_*^+}(\eta) & \text{para } \eta \leq \eta_* \\ \Gamma_{\gamma_*^-}(\eta) & \text{para } \eta \geq \eta_* \end{cases}$$

Ésta satisface

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \Gamma_*(\eta) = P_{\gamma_*^+}, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_*(\eta) = P_{\gamma_*^-}.$$

La trayectoria Γ_* , así como las curvas C^+ y C^- obtenidas numéricamente, se muestran en la figura 4.1, donde los parámetros considerados son $m = 3.5$, $p = 0.5$, $k = 10$.



Nota 3.4.6 *La unicidad de tal solución autosemejante permanece abierta. Ésta podría obtenerse de cierta propiedad de monotonía de las curvas C^+ y C^- , sugerida por la figura 4.1, que aseguraría que se cortan en un solo punto.*

Nota 3.4.7 *A partir de esta figura vemos que el punto de intersección de C^+ y C^- satisface $Z < 0$. De esta forma el perfil no es simétrico y alcanza un máximo para valores negativos de ξ . Esto también nos muestra que el máximo de la correspondiente solución autosemejante se mueve hacia la izquierda según aumenta el tiempo, un efecto de la convección.*

Nota 3.4.8 *En el caso $0 < k \leq 1/(4n)$, el mismo argumento muestra que existe una conexión entre L_1^+ y el origen. Esto da lugar a una solución autosemejante con soporte compacto que satisface la ecuación (EI) en ambas interfases, pero con la interfase derecha estacionaria.*

Con el fin de completar la caracterización de las trayectorias de L_1 , ver el lema 3.4.1 para la parte negativa, también describiremos los conjuntos G_H^\pm . Estos corresponden a un perfil con soporte compacto que satisface la ecuación (EI) al menos en una interfase.

De acuerdo a los resultados de la sección anterior tenemos inmediatamente que

$$G_H^+ = G_{H0}^+ \cup G_{H1}^+ \cup G_{H\infty}^+$$

donde

$$G_{H0}^+ = \{\gamma > 0 : \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma(\eta, \gamma) \in L_0\},$$

$$G_{H1}^+ = \{\gamma > 0 : \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma(\eta, \gamma) \in L_1\},$$

$$G_{H\infty}^+ = \{\gamma > 0 : \lim_{\eta \rightarrow \infty} |Y(\eta)| = \infty\}.$$

Lema 3.4.9 *Los conjuntos G_{H0}^+ y $G_{H\infty}^+$ son abiertos y no vacíos.*

Demostración

G_{H0}^+ contiene algún intervalo (a, γ_0^+) , donde $a > 0$ está cerca de γ_0^+ , dado que $\frac{dY}{d\eta} > 0$ en el conjunto

$$\{0 < X < \Lambda, Y = b, Z \geq c\}.$$

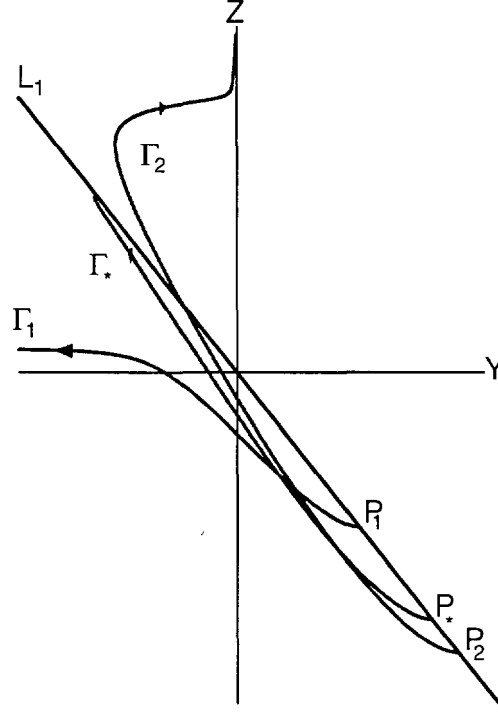


Figura 4.2: Las trayectorias (proyectadas sobre el plano YZ) corresponden a perfiles con soporte compacto que satisfacen (EI) en la interfase derecha. En la interfase izquierda se tiene: Γ_* satisface (EI); Γ_2 satisface (EI*); Γ_1 no satisface (CF).

para todo $b < 0$ y $c = Z(a, \eta^+(a)) > 0$ grande. También $G_{H\infty}^+$ contiene algún intervalo $(0, d)$, donde

$$d = \inf\{\gamma > 0 : Z(\gamma, \eta^+(\gamma)) < Z(-\gamma, \eta^-(-\gamma))\} > 0.$$

Finalmente, los conjuntos G_{H0}^+ y $G_{H\infty}^+$ son abiertos, el primero observando que L_0 se comporta como un sumidero para $Z > 0$ y el segundo dado que $\frac{dY}{d\eta} < 0$ para $Y \rightarrow \infty$ y Z acotado. #

Como consecuencia tenemos que G_{H1}^+ es cerrado. El hecho de que G_{H0}^+ es no vacío implica a la existencia de un continuo de soluciones autosemejantes que satisfacen (EI) en una de las interfases y (EI*) en la otra, lo cual prueba el teorema 3.2.4. En la

figura 4.2 incluimos las gráficas de las diferentes trayectorias correspondientes a G_H^+ , proyectadas sobre el plano $\{X = 0\}$, con los mismos parámetros de la figura 4.1. La misma caracterización se puede hacer para la parte negativa de L_1 , es decir para G_H^+ .

3.5 Caso $n \leq 1$

En esta sección consideramos el caso $n \leq 1$ siguiendo el mismo análisis de las dos secciones previas. Comencemos con el caso $n = 1$ ($m + p = 2$), $k > 0$. Aquí la ecuación correcta de la interfase (EI) es (1.8, 1.9). Deduciremos, utilizando un espacio de fases tridimensional análogo a (3.14), la existencia de una solución autosemejante que satisface (EI).

Consideramos aquí, en lugar de (3.14), las variables

$$X = \varphi^{m-1}, \quad Y = \varphi^{m-2}\varphi', \quad Z = \xi, \quad \frac{d}{d\eta} = X^{m-1} \frac{d}{d\xi}, \quad (5.35)$$

para obtener el sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\eta} = (m-1)XY \\ \frac{dY}{d\eta} = -(Y+Z)Y + g_2(X) \\ \frac{dZ}{d\eta} = X \end{cases} \quad (5.36)$$

Recordemos que para este caso tenemos que $\alpha = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{1-p}$ y $\beta = 1$. Como antes, el punto donde g_2 se anula, $\Lambda = k(m-1)$, da una cota superior absoluta para el perfil, $\phi \leq (k(m-1))^{\frac{1}{m-1}}$. Los puntos críticos están localizados sobre la curva $L = \{(0, \gamma, -(\gamma + k/\gamma), \gamma \in \mathbb{R} - \{0\})\}$. Nótese que sobre L tenemos $|Z| \geq 2\sqrt{k}$. Esto está relacionado con la velocidad mínima de propagación (ver [58]). En particular, tenemos que el soporte del perfil debe contener el intervalo $[-2\sqrt{k} - 1, 2\sqrt{k} - 1]$.

Del comentario anterior, la ecuación correcta de la interfase (EI) correspondería a los puntos de L con $|\gamma| \geq \sqrt{k}$. La otra rama $|\gamma| < \sqrt{k}$ se corresponde con (EI*).

El sistema (5.36) posee algunas trayectorias explícitas. En primer lugar la trayectoria acotada

$$\Gamma_1 = \{X = \frac{m^2 - 1}{2m}(k - mY^2), Z = -(m + 1)Y, |Y| \leq \sqrt{\frac{k}{m}}\}, \quad (5.37)$$

que corresponde a la solución autosemejante

$$\frac{u^{m-1}(x, t)}{m - 1} = t \left[\frac{(m + 1)k}{2m} - \left(\frac{x}{2(m + 1)t} + 1 \right)^2 \right]_+ \quad (5.38)$$

ver [59]. Por otro lado, para cada punto crítico sobre L tenemos la trayectoria no acotada

$$\Gamma_{\infty, \gamma} = \{Y = \gamma, Z = \frac{1}{\gamma(m - 1)}X - \gamma - \frac{k}{\gamma}, X \geq 0\}, \quad (5.39)$$

correspondiente a una solución de la ecuación (1.1) en forma de onda viajera

$$\frac{u^{m-1}(x, t)}{m - 1} = [\gamma x + (\gamma^2 - \gamma + k)t]_+$$

ver [58]. Estas soluciones satisfacen (EI) o (EI*) dependiendo del valor de γ . La superficie donde $\frac{dY}{d\eta} = 0$, es decir, el conjunto formado por las ondas viajeras (5.39)

$$Q = \{(Y + Z)Y = g_2(X)\} = \{\Gamma_{\infty, \gamma}, \gamma \neq 0\}, \quad (5.40)$$

es invariante mediante el flujo definido por (5.36). Esto implica que las trayectorias que atraviesan el plano $\{Y = 0\}$ tienen que satisfacer $\frac{dY}{d\eta} < 0$ para todo $\eta \in \mathbb{R}$, y los correspondientes perfiles son cóncavos en variable presión en el conjunto de positividad.

Los valores propios de la aproximación lineal de (5.36) alrededor de cualquier punto $P_\gamma \in L$ son $\lambda_1 = (m - 1)\gamma$, $\lambda_2 = k/\gamma - \gamma$ y $\lambda_3 = 0$. Por tanto, para cada $|\gamma| > \sqrt{k}$, el punto P_γ tiene un comportamiento de punto silla, y existe una única trayectoria $\Gamma(\eta, \gamma)$ que satisface

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \Gamma(\eta, \gamma) &= P_\gamma & \text{si } \gamma > \sqrt{k} \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma(\eta, \gamma) &= P_\gamma & \text{si } \gamma < -\sqrt{k}. \end{aligned}$$

Este hecho, junto con la existencia de la solución anterior en forma de onda viajera, implica que en este caso, $|\gamma| > \sqrt{k}$, no pueden existir soluciones autosemejantes con

soporte compacto que satisfagan la ecuación (EI) al menos en una de las interfaces. Aún más, el perfil de cualquier solución autosemejante con soporte compacto que satisface (EI) debe tener soporte exactamente $[-2\sqrt{k} - 1, 2\sqrt{k} - 1]$.

Si $|\gamma| < \sqrt{k}$ el punto P_γ es un nodo, y existe una variedad bidimensional invariante que contiene a P_γ , estable cuando $\gamma < 0$ e inestable si $\gamma > 0$. Por último, si $|\gamma| = \sqrt{k}$ el punto P_γ se comporta como un punto silla-nodo.

Pasamos ahora a la demostración de la existencia y estableceremos la conexión entre los puntos críticos $P_+ = (0, \sqrt{k}, -2\sqrt{k})$ y $P_- = (0, -\sqrt{k}, 2\sqrt{k})$.

Demostración del teorema 3.2.6. Procederemos en varias etapas, siguiendo los argumentos de las secciones precedentes. Partiendo del punto P_+ tenemos dos trayectorias especiales, una contenida en el plano $\{X = 0\}$, es decir, $\Gamma_0 = \{(0, Y, -2\sqrt{k}), 0 \leq Y \leq \sqrt{k}\}$, y además la trayectoria correspondiente a la variedad inestable del comportamiento silla, es decir, la solución en forma de onda viajera, $\Gamma_{\infty, \sqrt{k}}$ de (5.39). Queremos estudiar todas las demás trayectorias correspondientes al comportamiento tipo nodo. Con este propósito consideremos la esfera S con centro en P_+ y con radio $r > 0$ pequeño. Las trayectorias que parten de P_+ cortan a S dando lugar a una curva continua simple $\Omega = \Omega(\lambda)$, parametrizada por $\lambda \in (0, \infty)$, siendo su frontera los puntos de intersección de Γ_0 y $\Gamma_{\infty, \sqrt{k}}$ con S . La curva Ω jugará el papel de L_1^+ en la demostración del teorema 3.2.5.

Disparamos desde Ω , es decir, para cada $\lambda \in (0, \infty)$ consideramos la trayectoria Γ_λ que pasa por el punto $\Omega(\lambda)$. Seguimos esta trayectoria hasta que corta al plano $H = \{Y = 0\}$. De esta manera definimos el conjunto (ver (4.28)),

$$J = \{\lambda > 0 : \Gamma_\lambda \text{ cruza } H\}. \quad (5.41)$$

Con un argumento análogo a la Proposición 3.3.7, obtenemos que para cada $0 < X_0 < k/\alpha$, $Z_0 < 0$, existe una trayectoria que conecta los puntos P_+ y $P_0 = (X_0, 0, Z_0)$. Esto implica que J contiene algún intervalo $[0, \lambda)$, $\lambda > 0$. Sea

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda > 0 : [0, \lambda) \subset J\} \leq \infty, \quad (5.42)$$

y la curva

$$C : [0, \lambda_0) \rightarrow H, \quad C(\lambda) = \Gamma_\lambda \cap H. \quad (5.43)$$

Al igual que antes, es fácil de ver que esta curva cruza la recta $\{Z = 0\}$ en H . Reflejando la trayectoria correspondiente por simetría, obtenemos la conexión deseada.

Para la unicidad, primeramente probaremos un resultado análogo a la Proposición 3.3.1.

Proposición 3.5.1 *Sean Γ_1 y Γ_2 dos trayectorias que salen del punto P_+ . Las proyecciones Ξ_1 y Ξ_2 de Γ_1 y Γ_2 sobre el plano $\{Z = 0\}$ no pueden cortarse en ningún punto $X > 0$ antes de alcanzar el recta $\{Y = 0\}$.*

Demostración

Escribiremos las proyecciones Ξ_1 y Ξ_2 en función de X , $\Xi_1 = Y_1(X)$, $\Xi_2 = Y_2(X)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, por ejemplo, $Y_1(\varepsilon) < Y_2(\varepsilon)$. Ahora los correspondientes puntos $(\varepsilon, Y_1(\varepsilon), Z_1)$ y $(\varepsilon, Y_2(\varepsilon), Z_2)$ sobre Γ_1 y Γ_2 satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.1, puesto que $Z_1 > Z_2$, por (5.36). Concluimos utilizando los mismos argumentos que en la demostración de dicha proposición. #

Disparamos ahora hacia atrás desde los puntos $(X_1, 0, 0)$ y $(X_2, 0, 0)$ con $X_1 < X_2$ y probaremos, utilizando el resultado anterior, que las correspondientes trayectorias Γ_1 y Γ_2 no pueden cortarse para ningún valor $Y > 0$. Esto implica que existe una única trayectoria que sale de P_+ que corta al eje X .

Con este fin consideremos las proyecciones $\Sigma_1 = Z_1(Y)$ y $\Sigma_2 = Z_2(Y)$ de Γ_1 y Γ_2 sobre el plano $X = 0$, y asumiremos, por contradicción, que se cortan en un primer punto $Z_1(Y_*) = Z_2(Y_*)$, con $Y_* > 0$. De esta manera, y por (5.36), obtenemos $Z_1(Y_0) > Z_2(Y_0)$ para todo $0 < Y_0 < Y_*$. Considerando ahora los respectivos puntos sobre Γ_1 y Γ_2 , es decir $(X_{0,1}, Y_0, Z_1(Y_0))$ y $(X_{0,2}, Y_0, Z_2(Y_0))$, de la Proposición 3.5.1 obtenemos $X_{0,1} < X_{0,2}$. Finalmente, de nuevo por (5.36) y utilizando $\frac{dY}{d\eta} < 0$, deducimos $\frac{dZ_1}{dY}(Y_0) > \frac{dZ_2}{dY}(Y_0)$, y esto se cumple para todo $0 < Y_0 < Y_*$, lo que contradice la suposición $Z_1(Y_*) = Z_2(Y_*)$. #

Finalmente consideremos el caso $n < 1$.

Demostración del teorema 3.2.3. Definimos aquí las variables

$$X = \varphi^{1-n}, \quad Y = \varphi^{m-n-1} \varphi', \quad Z = \xi, \quad \frac{d}{d\eta} = X^{\frac{m-n}{1-n}} \frac{d}{d\xi}, \quad (5.44)$$

obteniendo el sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\eta} = (1-n)XY \\ \frac{dY}{d\eta} = -(1+nY + \beta XZ)Y + g_3(X) \\ \frac{dZ}{d\eta} = X^{\frac{m-n}{1-n}} \end{cases} \quad (5.45)$$

donde $g_3(s) = \alpha s^{\frac{1-p}{1-n}} - k$. El conjunto de los puntos críticos consiste en dos rectas

$$L_{\pm} = \{X = 0, Y = -a_{\pm}\}, \quad a_{\pm} = \frac{1}{2n}(1 \pm \sqrt{1 - 4kn}) > 0, \quad (5.46)$$

que existen sólo si $k \leq 1/(4n)$. Ambas rectas están contenidas en el semiespacio $\{Y < 0\}$, por lo tanto no puede existir ninguna conexión entre ellas. Como en el caso anterior los puntos en el infinito $(0, \pm\infty, Z)$ no satisfacen la condición de flujo. Por otro lado, si $k > 1/(4n)$ no hay puntos críticos finitos por consiguiente toda solución autosemejante tiene que ser positiva, ver también [35]. #

Linealizando alrededor de los puntos críticos que están sobre L_- vemos que se comportan como nodos estables, mientras que los de L_+ se comportan como puntos de silla. Las trayectorias (no acotadas) que finalizan en estas rectas, satisfacen el tercer comportamiento comentado en la introducción de este capítulo. En efecto, los puntos $(0, a_{\pm}, 0)$ corresponden a las soluciones estacionarias (3.24).

Bibliografía

- [1] J. AGUIRRE, M. ESCOBEDO *A Cauchy problem for $u_t - \Delta u = u^p$ with $0 < p < 1$* , Annales Fac. Sci. Toulouse **8** (1986), 175–203.
- [2] R. ARIS, "The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts", Vols. I & II, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [3] D.G. ARONSON, *Regularity properties of flows through porous media: the interface*, Arch. Rat. Mech. Anal., **37** (1979), 1–10.
- [4] D.G. ARONSON, *Density-dependent interaction-diffusion systems*, in "Dynamics and modelling of reactive systems" (Stewart et al. eds.) pp. 161–176, Academic Press, New York, 1980.
- [5] D.G. ARONSON, *The porous medium equation*, in "Nonlinear diffusion problems" (A. Fasano and E. Primicerio eds.) pp. 1–46, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1224, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [6] D.G. ARONSON, J.L. VAZQUEZ, *Anomalous exponents in nonlinear diffusion*, J. Nonlinear Sci., **5** (1995), 29–56.
- [7] D.G. ARONSON, H.F. WEINBERGER *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, in "Partial Differential Equations and Related Topics", pp. 5–49, Lecture Notes in Mathematics, New York, 1975.

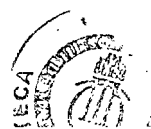


- [8] C. ATKINSON, G. E. H. REUTER, C. J. RIDDLE-ROWE *Travelling wave solutions for some nonlinear diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal **12** (1981), 880–892.
- [9] G.I. BARENBLATT, "Similarity, self-similarity and intermediate asymptotics", Consultants Bureau, New York, 1982.
- [10] G.I. BARENBLATT, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Prikl. Mat. Mekh., 16 (1952), 67–78 (en ruso).
- [11] J. BEAR, "Dynamics of fluids in porous media", American Elsevier, New York, 1972.
- [12] J. BEBERNES, D. EBERLY, "Mathematical problems from combustion theory", Springer-Verlag, New York, 1989.
- [13] Ph. BÉNILAN, S. ISMAIL *Générateur de semi-groupes non linéaires et la formule de Lie-Trotter*, Annales Fac. Sci. Toulouse **7** (1985), 151–160.
- [14] Ph. BÉNILAN, J.L. VAZQUEZ *Concavity of solutions of the porous medium equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **299** (1987), 81–93.
- [15] J. BUCKMASTER, *Viscous sheets advancing over dry beds*, J. Fluid Mech. **81** (1977), 735–756.
- [16] J. BUCKMASTER, G.S.S. LUDFORD, "Theory of laminar flames", Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1982.
- [17] J.M. BURGERS, "The nonlinear diffusion equation", Reidel, Dordrecht, 1975.
- [18] J. CARR, "Applications of Center Manifold Theory", Springer-Verlag, New York, 1981.
- [19] E.C. CHILDS, "An introduction to the physical basis of soil water phenomena", Wiley, London, 1969.

- [20] S.N. CHOW, J.K. HALE, "Methods of bifurcation theory", Springer, New York, 1996.
- [21] M.G. CRANDALL *An introduction to evolution governed by accretive operators*, in "Dynamical Systems, an International Symposium", (L. Cesari et al eds.) pp. 131–165, Academic Press, N.Y., 1976.
- [22] J. CRANK, "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [23] J.I. DIAZ, R. KERSNER, *Non existence d'une des frontières libres dans une équation dégénérée en théorie de la filtration*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **296** (1983), 505–508.
- [24] C.M. ELLIOT, J.R. OCKENDON, "Weak and variational methods for moving boundary problems", Pitman, Boston, 1982.
- [25] H. ENGLER, *Relations between travelling wave solutions of quasilinear parabolic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 297–302.
- [26] M. ESCOBEDO, E. ZUAZUA, J. L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour and source-type solutions for a diffusion-convection equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **124** (1993), 43–65.
- [27] P.C. FIFE, J.B. MCLEOD, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.
- [28] R.A. FISHER, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugen. **7** (1937), 355–369.
- [29] V.A. GALAKTIONOV, V.A. DOROTSITSYN, G.G. ELENIN, S.P. KURDYUMOV, A.A. SAMARSKII, *A quasilinear heat equation with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotics, structures*, J. Soviet Math. **41** (1988), 1222–1292. traducción de Itog. Nauk. Tekhn. **28** (1986), 95–206.

- [30] V.A GALAKTIONOV, S.I. SHMAREV, J.L. VAZQUEZ, *Second order interface equations for nonlinear diffusion with very strong absorbtion*, Comm. Contemp. Math., **1** (1999), 51–64
- [31] B.H. GILDING, *The correspondence between travelling-wave solutions of a nonlinear reaction-convection-diffusion equation and an integral equation*, Diff. Int. Eqns. **9** (1996), 919–947.
- [32] B.H. GILDING, *The occurrence of interfaces in nonlinear diffusion-advection-processes*, Arch. Rational Mech. Anal. **100** (1988), 243–263.
- [33] B.H. GILDING, *Stabilization of flows through a porous media*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 237–246.
- [34] B.H. GILDING, *On a class of similarity solutions of the porous media equation, III*, J. Math. Anal. Appl., **77** (1980), 381–402.
- [35] B.H. GILDING, R. KERSNER, *The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves*, J. Diff. Eqns. **124** (1996), 27–79.
- [36] B.H. GILDING, R. KERSNER, *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection-reaction*, preprint.
- [37] B.H. GILDING, R. KERSNER, *Instantaneous shrinking in nonlinear diffusion-convection*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 385–394.
- [38] B.H. GILDING and L.A. PELETIER, *On a class of similarity solutions of the porous media equation*, J. Math. Anal. Appl., **55** (1976), 351–364.
- [39] B.H. GILDING and L.A. PELETIER, *On a class of similarity solutions of the porous media equation, II*, J. Math. Anal. Appl., **57** (1977), pp. 522–538.
- [40] N. GOLDENFELD, O. MARTIN, Y. OONO, F. LIU, *Anomalous dimensions and the renormalization group in a nonlinear diffusion process*, Phys. Rev. Letters **64** (1990), 1361–1364.

- [41] J.L. GRAVELEAU, P. JAMET *A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations*, SIAM J. Appl. Math. **29** (1971), 199-223.
- [42] J. GUCKENHEIMER, P.J. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [43] M.A. HERRERO, J.L. VAZQUEZ, *Thermal waves in absorbing media*, J. Diff. Eqns. **74** (1988), 218-233.
- [44] J. HULSHOF, *Recent results on selfsimilar solutions of degenerate nonlinear diffusion equations*, in "Reaction Diffusion Systems" (G. Caristi et al. eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Vol. 194, Marcel Dekker, 1997.
- [45] J. HULSHOF, J.L. VAZQUEZ, *Self-similar solutions of the second kind for the modified porous medium equation*, Euro. J. Appl. Math. **5** (1994), 391-403.
- [46] A.S KALASHNIKOV, *The nature of propagation of perturbations in processes that can be described by quasilinear degenerate parabolic equations*, Trudy Sem. Petrovsk. **1** (1975), 135-144.
- [47] A.S. KALASHNIKOV, *Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations*, Russian Math. surveys **42** (1987), 169-222.
- [48] S. KAMIN, L.A. PELETIER and J.L. VAZQUEZ, *Classification de solutions singulières à l'origine pour une équation de la chaleur non linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, **305** (1987), pp. 595-598.
- [49] S. KAMIN, L. VERON, *Existence and uniqueness of the very singular solution of the porous media equation with absorption*, J. d'Analyse Mathématique, **51** (1988), 245-258.
- [50] B.F. KNERR, *The porous medium equation in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 381-415.



- [51] A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY, N. PISKUNOV, *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bull. Univ. Moskov, Ser. Internat. Sec Math. **1** (1937), 1–25.
- [52] PH. LAURENÇOT, F. SIMONDON, *Source-type solutions to porous medium equations with convection*, Comm. Appl. Anal. **1**, (1997), 489–502.
- [53] V.P. MASLOV, V.G. DANILOV, K.A. KOLOSOV, "Mathematical modelling of heat and mass-transport processes", Nauka, Moscow, 1987. [en ruso]
- [54] MURRAY, J.D. "Mathematical Biology", Biomathematics Texts, Springer-Verlag, 1993.
- [55] O.A. OLEINIK, A.S. KALASHNIKOV, Y.L. CHZHOU, *The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **22**, (1958), 667–704. [en ruso]
- [56] A. de PABLO, A. SANCHEZ, *Travelling wave behaviour for a Porous-Fisher equation*, Euro. J. Appl. Math. **9** (1998), 285–304.
- [57] A. de PABLO, A. SANCHEZ, *Global travelling waves in reaction-convection-diffusion equations*, J. Diff. Eqns. **165** (2000), 377–413.
- [58] A. de PABLO, J.L. VAZQUEZ, *Travelling waves and finite propagation in a reaction-diffusion equation*, J. Diff. Eqns. **93** (1991), 19–61.
- [59] A. de PABLO, J.L. VAZQUEZ, *The balance between strong reaction and slow diffusion*, Comm. Partial Diff. Eqns. **15** (1990), 159–183.
- [60] L.A. PELETIER and D. TERMAN, *A very singular solution of the porous media equation with absorption*, J. Diff. Eqns., **65** (1986), 396–410.
- [61] L. PERKO, "Differential Equations and Dynamical Systems", Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, 1991.

- [62] L.A. RICHARDS, *Capillary conduction of liquids through porous mediums*, Physics **1** (1931), 318–333.
- [63] P. ROSENAU, S. KAMIN, *Thermal waves in an absorbing and convecting medium*, Phys. D **8** (1983), 273–283.
- [64] A.A. SAMARSKII, V.A. GALAKTIONOV, S.P. KURDYUMOV and A.P. MIKHAILOV, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
- [65] F. SANCHEZ-GARDUÑO, P.K. MAINI, *Travelling wave phenomena in some degenerate reaction-diffusion equations*, J. Diff. Eqns. **117** (1995), 281–319.
- [66] D. SWARTZENDRUBER, *The flow of water in unsaturated soils* in "Flow through porous media", (R.J.M. de Wiest ed.) pp. 215–292, Academic Press, New York, 1969.
- [67] J.L. VAZQUEZ, *Singular solutions and asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations*, in "International Conference on Differential Equations; Barcelona 91 (Equadiff-91)" pp. 234–249 (C. Perelló et al. eds.), World Scientific, Singapore, 1993.
- [68] Y.B. ZEL'DOVICH, *Theory of flame propagation*, National Advisory Committee for Aeronautics Technical Memorandum **1282** (1951), traducción de Zh. Fiz. Khim. **22** (1948), 27–49.
- [69] Y.B. ZEL'DOVICH, Y.P. RAIZER, "Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena", Vols. I & II, Academic Press, New York, 1967.

Chris Liper Smith

~~Chris Liper Smith~~

~~Chris Liper Smith~~

~~Chris Liper Smith~~

~~Chris Liper Smith~~



D. ARIEL SÁNCHEZ VALDÉS, con D. N. I. : X1894684 J

AUTORIZA:

A que su tesis doctoral con el título: **"Ondas viajeras y soluciones autosemejantes en ecuaciones parabólicas"** pueda ser utilizada para fines de investigación por parte de la Universidad Carlos III de Madrid.

Leganés, 16 de mayo de 2001

A handwritten signature in black ink, appearing to be "Ariel Sánchez Valdés".

Fdo.: Ariel Sánchez Valdés

